

الفصل الأول

Chapter One

Complex Numbers الأعداد المركبة

الحاجة الى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية.

[1-1]

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة.

[1-2]

مرافق العدد المركب.

[1-3]

الجذور التربيعية للعدد المركب.

[1-4]

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$.

[1-5]

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

[1-6]

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة.

[1-7]

الصيغة القطبية للعدد المركب.

[1-8]

مبرهنة دي موافر.

[1-9]

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$R(z) = x = r \cos \theta$	الجزء الحقيقي للعدد z
$I(z) = y = r \sin \theta$	الجزء التخيلي للعدد z
$\arg(z) = \theta$	سعة العدد المركب z
$r = z = \text{mod } z$	مقياس العدد المركب z
LHS	الطرف الايسر
RHS	الطرف الايمن
w	الأعداد الكلية
N	الأعداد الطبيعية
Z	الأعداد الصحيحة
Q	الأعداد النسبية
R	الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	الأعداد المركبة

[1-1] الحاجة الى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية.

لقد درسنا في الصفوف السابقة حل المعادلة الخطية (Linear Equation)، وعرفنا انه يوجد حل واحد في مجموعة الأعداد الحقيقية لاية معادلة خطية.

وعند دراستنا للمعادلة التربيعية تبين أنه لنوع معين منها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، ونوع آخر لا يوجد لها حل في هذه المجموعة، مثل المعادلات: $(x^2 + 1 = 0)$ ، $(x^2 + 4x + 5 = 0)$ وكما تعلمت ان المعادلات التربيعية التي يكون مميزها $(b^2 - 4ac)$ عدداً سالباً لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

ان ظهور مثل هذه المعادلات في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية ادى الى الحاجة الى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية الى مجموعة اوسع منها هي مجموعة الأعداد المركبة والتي سوف تكون موضوع دراستنا في هذا الفصل.

إننا عندما نريد حل المعادلة $(x^2 + 1 = 0)$ أو $(x^2 = -1)$ لانجد عدداً حقيقياً مربعه يساوي (-1) لذلك نفترض وجود عدد يساوي $\sqrt{-1}$ وهو غير حقيقي ونرمز له بالرمز (i) ويسمى الوحدة التخيلية (Imaginary Unit) وهو ليس من الأعداد التي تقرر مع العد أو القياس.

إن العدد (i) يحقق الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية ما عدا خاصية الترتيب، ولهذا نستطيع حساب قوى (i) كما في الأمثلة الآتية:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^{27} = i^{26} \cdot i = (i^2)^{13} \cdot i = (-1)^{13} \cdot i = -i$$

$$i^{81} = i^{80} \cdot i = (i^2)^{40} \cdot i = (-1)^{40} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^{-7} = (i)^{-8} \cdot i = (i^2)^{-4} \cdot i = (-1)^{-4} \cdot i = i$$

$$i^{-15} = i^{-16} \cdot i = (i^2)^{-8} \cdot i = (-1)^{-8} \cdot i = i$$

وبصورة عامة يكون

$$i^{4n+r} = i^r, \quad n \in \mathbb{W}, \quad r = 0, 1, 2, 3 \quad \text{حيث}$$

$$\text{whole Numbers} \quad \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{حيث}$$

وهذا يعني انه عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يكون احد عناصر المجموعة $\{-i, i, -1, 1\}$

حيث نقسم أس (i) على (4) والباقي هو الأس الجديد الى (i).

فمثلاً : $i^{25} = i$ لأن ناتج قسمة 25 على 4 يساوي 6 والباقي 1 .
 $i^{99} = i^3 = -i$ لأن ناتج قسمة 99 على 4 يساوي 24 والباقي 3 .

مثال - 1

اكتب ما يلي في أبسط صورة :

(a) i^{16} (b) i^{58} (c) i^{12n+93} (d) i^{-13}

الحل :

(a) $i^{16} = i^{4(4) + 0} = i^0 = 1$

(b) $i^{58} = i^{4(14) + 2} = i^2 = -1$

(c) $i^{12n+93} = (i^4)^{3n} \cdot i^{93} = (1)^{3n} i^{4(23)+1} = (1)(i) = i$

(d) $i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$

يمكننا كتابة الجذور التربيعية لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i فمثلاً :

ملاحظة

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$$

$$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-15} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{15}i$$

وبصورة عامة يكون

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} i, \forall a \geq 0$$

والآن بعد أن تعرفنا على العدد التخيلي ماذا نسمي العدد $(a+bi)$ حيث a عدد حقيقي، b عدد حقيقي، $i = \sqrt{-1}$ ؟

العدد المركب

تعريف [1-1-1]

يقال للعدد $c = a+bi$ حيث a, b عددين حقيقيين $i = \sqrt{-1}$ عدد مركب (Complex Number)، يسمى a جزؤه الحقيقي (Real Part) ويسمى b جزؤه التخيلي (Imaginary Part). ويرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويقال للصيغة $a+bi$ الصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب.

ان اي عدد مركب $c = a + bi$ يمكن جعله مناظراً للزوج المرتب الوحيد (a, b)

ملاحظة

اذ أن a, b عددين حقيقيين، وبالعكس فالعدد الحقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو $(a, 0)$. وان العدد i (Imaginary Unit) حيث ان: $i \Leftrightarrow (0, 1)$ أو $i = 0+1i$.

يقال للعدد $bi \Leftrightarrow (0, b)$ عدد تخيلي بحت (pure Imaginary Number) والعدد

$a \Leftrightarrow (a, 0)$ إنه عدد حقيقي بحت (Pure Real Number).

فالعدد $3i + 2$ عدد مركب، جزؤه الحقيقي 2 وجزؤه التخيلي 3

والعدد -2 عدد مركب، جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 0

اما العدد $-3i$ فهي عدد مركب، جزؤه الحقيقي 0 وجزؤه التخيلي -3

مثال - 2

اكتب الأعداد الآتية على صورة $a+bi$:

a) -5 b) $\sqrt{-100}$ c) $-1-\sqrt{-3}$ d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$

الحل :

a) $-5 = -5 + 0i$

b) $\sqrt{-100} = \sqrt{100}\sqrt{-1} = 10i = 0 + 10i$

c) $-1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}i$

d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{25}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

بما ان كل عدد حقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a + 0i$ أو $(a, 0)$ اي يمكن كتابته على صورة عدد مركب جزؤه التخيلي صفر فان هذا يبين أن :

مجموعة الأعداد الحقيقية R هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ اي ان $R \subset \mathbb{C}$.

ملاحظة

تساوي الأعداد المركبة

تعريف [1-1-2]

إذا كان : $c_1 = a_1 + b_1i$, $c_2 = a_2 + b_2i$

فإن : $c_1 = c_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

اي يتساوى العددين المركبان اذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس.

جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي .

a) $2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$.

b) $3x + 4i = 2 + 8yi$

c) $(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$

الحل:

a) $\because 2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$

$$\therefore 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$2 = y + 1 \Rightarrow y = 2 - 1$$

$$\therefore y = 1$$

b) $3x + 4i = 2 + 8yi$

$$\therefore 3x = 2, 4 = 8y \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) $\because (2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$

$$\therefore 2y + 1 = -8, -(2x - 1) = 3 \Rightarrow$$

$$2y = -9, -2x = 2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-9}{2}, x = -1$$

[1-2] العمليات على مجموعة الأعداد المركبة.

أولاً: عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة :

جمع الأعداد المركبة

تعريف [1-2-1]

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فإن
 $c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$
 وكما تعلم أن: $(a_1 + a_2) \in \mathbb{R}$, $(b_1 + b_2) \in \mathbb{R}$ لأن مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة
 تحت عملية الجمع .

$$\therefore (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \in \mathbb{C}$$

أي أن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع .

مثال - 4

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

a) $3 + 4\sqrt{2}i$, $5 - 2\sqrt{2}i$

b) 3 , $2 - 5i$

c) $1 - i$, $3i$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{a) } (3 + 4\sqrt{2}i) + (5 - 2\sqrt{2}i) &= (3 + 5) + (4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})i \\ &= 8 + 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (3) + (2 - 5i) &= (3 + 0i) + (2 - 5i) \\ &= (3 + 2) + (0 - 5)i = 5 - 5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (1 - i) + 3i &= (1 - i) + (0 + 3i) \\ &= (1 + 0) + (-1 + 3)i = 1 + 2i \end{aligned}$$

خواص عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة

تتمتع عملية الجمع على الأعداد المركبة بالخواص الآتية:

$$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

فان:

$$(1) \quad c_1 + c_2 = c_2 + c_1$$

* الخاصية الإبدالية. (Commutativity)

$$(2) \quad c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$$

* الخاصية التجميعية. (Associativity)

$$(3)$$

* النظير الجمعي. (Additive Inverse)

$$\forall c \in \mathbb{C}, c = a + bi \exists z \in \mathbb{C} : c + z = z + c = 0 \Rightarrow z = -c = -a - bi$$

$$(4) \quad e = 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C} \text{ يرمز له بالرمز } e \text{ ويُعرف } \text{Additive Identity} \text{ العنصر المحايد الجمعي.}$$

ان طرح أي عدد مركب من آخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني.

ملاحظة

جد ناتج :

مثال - 5

$$(7-13i) - (9+4i)$$

الحل :

$$(7-13i) - (9+4i)$$

$$= (7-13i) + (-9-4i)$$

$$= (7-9) + (-13-4)i$$

$$= -2 - 17i$$

$$(2-4i) + x = -5+i$$

حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل :

$$(2-4i) + x = -5+i$$

بإضافة النظير الجمعي للعدد $(2-4i)$ للطرفين $(2-4i) + (-2+4i) + x = (-5+i) + (-2+4i)$

$$\therefore x = (-5+i) + (-2+4i)$$

$$= (-5-2) + (1+4)i$$

$$x = -7+5i$$

ثانياً: عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة :

لايجاد عملية ضرب عددين مركبين نقوم بضربهما بصفتهما مقدارين جبريين ونعوض بدلاً من i^2 العدد

(-1) كما يأتي :

إذا كان $c_1 = a_1 + b_1 i$ ، $c_2 = a_2 + b_2 i$ فإن

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i)$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

فإن $c = a + b i$

إذا كان $m \in \mathbb{R}$ ،

$$m c = m a + m b i$$

ملاحظة

ضرب الأعداد المركبة

تعريف [1-2-2]

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فإن :

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

وكما تعلم : $(a_1 a_2 - b_1 b_2) \in \mathbb{R}$ وأن $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{R}$ لأن

$\mathbb{R}$ مغلق تحت عملية الضرب

لذلك فإن $c_1 \cdot c_2 \in \mathbb{C}$

أي أن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال - 7

جد ناتج كلا مما يأتي :

a) $(2 - 3i)(3 - 5i)$

b) $(3 + 4i)^2$

c) $i(1 + i)$

d) $-\frac{5}{2}(4 + 3i)$

e) $(1 + i)^2 + (1 - i)^2$

الحل :

a) $(2 - 3i)(3 - 5i) = (6 - 15) + (-10 - 9)i$
 $= -9 - 19i$

أو يمكن إيجاد حاصل الضرب بالتوزيع

$(2 - 3i)(3 - 5i) = 6 - 10i - 9i + 15i^2 = -9 - 19i$

b) $(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2$
 $= 9 + 24i - 16$
 $= -7 + 24i$

$(3 + 4i)^2 = (3 + 4i)(3 + 4i) = (9 - 16) + (12 + 12)i = -7 + 24i$ أو

c) $i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$

$$d) -\frac{5}{2}(4+3i) = -10 - \frac{15}{2}i$$

$$e) (1+i)^2 + (1-i)^2 = (1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)$$

$$= 2i + (-2i) = 0$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة

تتمتع عملية الضرب على الأعداد المركبة بالخواص الآتية:

$$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

$$(1) c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$$

* الخاصية الإبدالية. (Commutativity)

$$(2) c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$$

* الخاصية التجميعية. (Associativity)

$$(3) 1 = (1+0i) \text{ وهو } (Multiplicative Identity)$$

* يتوفر العنصر المحايد الضربي (Multiplicative Inverse)

$$(4) \forall c \neq 0+0i, \exists z \neq 0+0i : c z = z c = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{c}$$

أي أن لكل عدد مركب c عدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ (يختلف عن الصفر) ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

[1-3] مرافق العدد المركب Conjugate Number

مرافق العدد المركب

تعريف [1-3-1]

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \bar{c} = a - bi \text{ هو العدد المركب } c = a + bi$$

فمثلاً: $3+i$ هو مرافق العدد $3-i$ وبالعكس، وكذلك مرافق i هو $-i$ وبالعكس.

وإن $5-4i$ مرافق $5+4i$ وبالعكس، وكذلك مرافق العدد 7 هو 7.

يتضح من تعريف المرافق أنه يحقق الخواص الآتية:

- 1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$
- 2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$
- 3) $\overline{\overline{c}} = c$
- 4) إذا كان $c = a + bi$ فإن $c \times \overline{c} = a^2 + b^2$
- 5) إذا كان $c \in \mathbb{R}$ فإن $\overline{c} = c$
- 6) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$, $c_2 \neq 0$

مثال - 8

إذا كان $c_1 = 1 + i$, $c_2 = 3 - 2i$ فتتحقق من :

(1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$ (2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

الحل:

(1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(1+i) + (3-2i)}$

$= \overline{(4-i)} = 4 + i$

$\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= (1-i) + (3+2i) = 4 + i$

$\therefore \overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

$\overline{c_1 - c_2} = \overline{c_1} - \overline{c_2}$ تأكد بنفسك ان

(2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3-2i+3i-2i^2} = \overline{5+i} = 5 - i$

$\overline{c_1} \times \overline{c_2} = \overline{(1+i)} \times \overline{(3-2i)} = (1-i) \times (3+2i)$

$= (3+2) + (2-3)i = 5 - i$

$\therefore \overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

مثال - 9

جد النظير الضربي للعدد $c = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

الحل:

النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2 - 2i}$$

$$= \frac{1}{2 - 2i} \times \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{2 + 2i}{4 + 4} = \frac{2 + 2i}{8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

مثال - 10

إذا كان $\frac{3 - 2i}{i}$ ، $\frac{x - yi}{1 + 5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in \mathbb{R}$

الحل:

$$\frac{3 - 2i}{i} = \left(\frac{x - yi}{1 + 5i} \right)$$

$$\frac{3 - 2i}{i} = \frac{x + yi}{1 - 5i}$$

$$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$$

$$xi - y = -7 - 17i$$

$$\therefore x = -17$$

$$y = 7$$

مثال - 11

إذا كان $c_2 = 1 + i$ ، $c_1 = 3 - 2i$ فتتحقق من : $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2} \right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

الحل:

$$\overline{\left(\frac{c_1}{c_2} \right)} = \overline{\left(\frac{3 - 2i}{1 + i} \right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \right)} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1+1} \right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{1-5i}{2} \right)} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+2i}{1-i}$$

$$= \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1}$$

$$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{c_1}{c_2} \right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

لأجراء قسمة العدد المركب c_1 على العدد المركب c_2 حيث $c_2 \neq 0$ فإننا نضرب بسط ومقام المقدار $\frac{c_1}{c_2}$ بمرافق المقام فيكون:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} \times \frac{\overline{c_2}}{\overline{c_2}}$$

ملاحظة

مثال - 12 - ضع كلاً مما يأتي بالصورة $a+bi$:

a) $\frac{1+i}{1-i}$

b) $\frac{2-i}{3+4i}$

c) $\frac{1+2i}{-2+i}$

$$a) \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$$

$$b) \frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16} = \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

$$c) \frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1} = \frac{-5i}{5} = -i = 0-i$$

يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a+bi$ وذلك :

$$x^2 + y^2 = x^2 - y^2 i^2 = (x-yi)(x+yi)$$

ملاحظة

مثال -13 حلل كلاً من العددين 10 ، 53 الى حاصل ضرب عاملين من صورة $a+bi$ حيث a, b عددين نسبيين .

الحل:

$$\bullet 10 = 9 + 1$$

او

$$10 = 1 + 9$$

$$= 9 - i^2$$

$$= 1 - 9i^2$$

$$= (3-i)(3+i)$$

$$= (1-3i)(1+3i)$$

$$\bullet 53 = 49 + 4$$

او

$$53 = 4 + 49$$

$$= 49 - 4i^2$$

$$= 4 - 49i^2$$

$$= (7-2i)(7+2i)$$

$$= (2-7i)(2+7i)$$

تمارين

1. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

$$i^5, i^6, i^{124}, i^{999}, i^{4n+1} \quad \forall n \in \mathbb{W}, (2+3i)^2 + (12+2i)$$

$$(10+3i)(0+6i), (1+i)^4 - (1-i)^4, \frac{12+i}{i}, \frac{3+4i}{3-4i}$$

$$\frac{i}{2+3i}, \left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3, \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i}, (1+i)^3 + (1-i)^3$$

2. جد قيمة كل من X و Y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية :

$$a) y+5i=(2x+i)(x+2i)$$

$$b) 8i=(x+2i)(y+2i)+1$$

$$c) \left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x+yi) = (1+2i)^2$$

$$d) \frac{2-i}{1+i}x + \frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}$$

3. أثبت ان :

$$a) \frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$$

$$b) \frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$$

$$c) (1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$$

4. حلل كلاً من الأعداد 85 ، 41 ، 125 ، 29 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث a, b

عددان نسيان.

5- جد قيمة X, Y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان .

[1-4] الجذور التربيعية للعدد المركب .

لقد تعلمت أنه إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإنه يوجد عدداً حقيقيان هما $\pm\sqrt{a}$ يحقق كل منهما المعادلة $x^2 = a$ ويسمى $\pm\sqrt{a}$ الجذرين التربيعيين للعدد a . أما إذا كان $a = 0$ فإن له جذر واحد هو 0 . والآن سنتناول دراسة الجذور التربيعية للعدد المركب .

مثال -14

جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$.

الحل:

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد c هو $x + yi$

$$\therefore (x + yi)^2 = 8 + 6i \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = 8 + 6i \Rightarrow$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 8 + 6i \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 = 8 \dots\dots\dots(1)$$

$$2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{x} \dots\dots\dots(2)$$

من تعريف تساوي عددين مركبين

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8$$

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \Rightarrow$$

بضرب الطرفين في $x^2 \neq 0$ ينتج :

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \pm 3 \quad \text{أو} \quad x^2 = -1$$

$$(x \in \mathbb{R} \text{ تهمل لان } x^2 = -1)$$

$$y = \frac{3}{\pm 3}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x نحصل على :

$$\therefore y = \pm 1$$

x	3	-3
y	1	-1

$$\therefore c_1 = 3 + i \quad \text{و} \quad c_2 = -3 - i$$

أي أن جذري العدد c هما $3 + i$, $-3 - i$

جد الجذور التربيعية للأعداد : $8i, -i, -17, -25$

الحل :

a) $c^2 = -25$ نفرض ان :

$$c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25}i = \pm 5i$$

b) $c^2 = -17$ نفرض ان :

$$c = \pm\sqrt{-17}$$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{17} i$$

c) نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $-i$

$$\therefore (x+yi)^2 = -i \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = 0 - i$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$$

$$2xy = -1$$

$$\therefore y = \frac{-1}{2x} \dots\dots\dots(2)$$

وبالتعويض من المعادلة (2) بالمعادلة (1) ينتج :

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \Rightarrow$$

بضرب الطرفين في $4x^2 \neq 0$ ينتج :

$$4x^4 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$$

$$(x \in \mathbb{R} \text{ لان } x \text{ يهمل لان } x^2 = -\frac{1}{2})$$

اما

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

او

$$\therefore y = -\left(\frac{1}{\pm(2)\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \text{ وبالتعويض في (2) عن قيمة } x \text{ نجد :}$$

$$= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ جذرا العدد $-i$ التربيعيان هما $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$

d) نفرض ان $x+yi$ هو الجذر التربيعي للعدد $8i \Rightarrow (x+yi)^2 = 8i$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 0 + 8i$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x} \dots\dots\dots(2)$$

$$x^2 - \frac{16}{x^2} = 0$$

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

وبضرب الطرفين في $x^2 \neq 0$ ينتج :

$$x^4 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow$$

(يهمل لان $x \in \mathbb{R}$)

$$x^2 = -4$$

اما

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

او

$$y = \frac{4}{\pm 2} = \pm 2$$

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x ينتج :

x	2	-2
y	2	-2

∴ جذرا العدد $8i$ التربيعيان هما $\pm (2+2i)$

[1-5] حل المعادلة التربيعية في $(\mathbb{C})$.

تعلمت من المرحلة المتوسطة ان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ وان $a, b, c \in \mathbb{R}$ حلين

يمكن ايجادهما بالدستور :
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وعرفت أنه اذا كان المقدار المميز $b^2 - 4ac$ سالباً فإنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية ولكن يوجد لها حلان في مجموعة الأعداد المركبة .

مثال - 16

حل المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة.

الحل :

حسب القانون (الدستور) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (4)(1)(5)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i \end{aligned}$$

إذا مجموعة حل المعادلة هي : $\{-2 - i, -2 + i\}$

ملاحظة

من الدستور نعلم ان جذري المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ التي معاملاتها حقيقية هما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ومجموع الجذرين هو : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين هو : $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Complex Numbers الأعداد المركبة

ويمكن الاستفادة من هذه الخواص كما يأتي :

أولاً : إذا كان $x + yi$ ($y \neq 0$) أحد جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ فإن $x - yi$ هو الجذر الآخر لها .

ثانياً : بقسمة طرفي المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ على $a \neq 0$ نحصل على $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ والتي هي عبارة عن :

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

مثال - 17

جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm (2+2i)$.

الحل :

$$(2+2i)(-2-2i) = (2-2) + (2-2)i = 0$$

$$\begin{aligned} (2+2i)(-2-2i) &= -(2+2i)^2 \\ &= -(4 + 8i + 4i^2) \\ &= -8i \end{aligned}$$

∴ المعادلة التربيعية هي :

$$x^2 - 0x + (-8i) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 8i = 0 \Rightarrow x^2 = 8i$$

مثال - 18

كوّن المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3-4i$.

الحل :

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-4i$

∴ الجذر الآخر هو المرافق له وهو $3+4i$

مجموع الجذرين = 6 وحاصل ضربهما = 25

∴ المعادلة هي :

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

تمارين

1. حل المعادلات التربيعية الآتية وبين أي منها يكون جذراها مترافقين؟

a) $z^2 = -12$

b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$

d) $z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

e) $4z^2 + 25 = 0$

f) $z^2 - 2z i + 3 = 0$

2. كون المعادلة التربيعية التي جذراها M, L حيث :

a) $M = 1 + 2i$

$L = 1 - i$

b) $M = \frac{3-i}{1+i}, L = (3-2i)^2$

3. جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة الآتية :

a) $-6i$

b) $7 + 24i$

c) $\frac{4}{1 - \sqrt{3} i}$

4. ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

a) i

b) $5 - i$

c) $\frac{\sqrt{2} + 3i}{4}$

5- إذا كان $3 + i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ وما هو الجذر الآخر؟

[1-6] الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

ليكن z احد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$

فان $z^3 = 1$ ومنها :

$$(z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$z=1 \quad \text{أو} \quad z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{أما}$$

ولحل المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ نستخدم الدستور :

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (4)(1)(1)}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

اي ان الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي :

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

ان مربع أي من الجذرين التخيليين يساوي الجذر التخيلي الاخر وهما مترافقان (تحقق من ذلك)

فاذا رمزنا لاحد الجذرين التخيليين بالرمز ω "ويقرأ أوميكا Omega" فان الجذر الآخر هو ω^2 .

ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة :

$$1, \omega, \omega^2$$

وهذه الجذور تحقق الخواص الآتية:

$$1) \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$2) \quad \omega^3 = 1$$

ومن الخاصية الأولى نحصل على الآتي:

$$1) \quad \omega + \omega^2 = -1 \quad (2) \quad 1 + \omega = -\omega^2 \quad (3) \quad 1 + \omega^2 = -\omega$$

$$4) \quad \omega = -1 - \omega^2 \quad (5) \quad \omega^2 = -1 - \omega \quad (6) \quad 1 = -\omega - \omega^2$$

ومن الخاصية الثانية يمكن التوصل الى النتائج الآتية:

$$\omega^4 = \omega^3 \cdot \omega = 1 \cdot \omega = \omega$$

$$\omega^{-4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3 \cdot \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

$$\omega^5 = \omega^3 \cdot \omega^2 = 1 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 \cdot \omega^2} = \frac{1}{1 \cdot \omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$$

$$\omega^6 = (\omega^3)^2 = (1)^2 = 1$$

$$\omega^{-6} = \frac{1}{\omega^6} = \frac{1}{1} = 1$$

وبالاستمرار على هذا النحو فان قوى (ω) لاعداد صحيحة تأخذ احدى القيم:

$$1, \omega, \omega^2$$

وتتكرر هذه القيم كلما زادت الاسس على التوالي بمقدار (3).

بمعنى أن:

$$\omega^{3n+r} = \omega^r$$

حيث n عدد صحيح , $r = 0, 1, 2$

مثال - 19

جد ناتج : ω^{33} , ω^{25} , ω^{-58}

الحل :

$$\omega^{33} = \omega^{3(11)+0} = \omega^0 = 1$$

$$\omega^{25} = \omega^{3(8)+1} = \omega^1 = \omega$$

$$\omega^{-58} = \omega^{3(-20)+2} = 1 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

بمعنى أن :

باقي قسمة أس (ω) على (3) هو الأس الجديد الى ω

مثال - 20

اثبت ان :

a) $\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$

b) $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$

الحل :

a) LHS = $\omega^7 + \omega^5 + 1 = \omega^6 \cdot \omega + \omega^3 \cdot \omega^2 + 1$

= $\omega + \omega^2 + 1 = 0 = \text{RHS}$ (حسب الخاصية الاولى)

b) المقدار الاول = $(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = [5 + 3(\omega + \omega^2)]^2$
 $= [5 - 3]^2 = (2)^2 = 4$

كذلك

المقدار الثاني = $-4(2 + \omega + 2\omega^2)^3$

= $-4[2(1 + \omega^2) + \omega]^3$

= $-4[-2\omega + \omega]^3 = -4[-\omega]^3$

= $-4(-1) = 4$

$\therefore (5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$

a) $1-i\omega^2$, $1-i\omega$ كَوْن المعادلة التربيعية التي جذراها

b) $\frac{2}{1-\omega}$, $\frac{2}{1-\omega^2}$

الحل :

a)

مجموع الجذرين

$$\begin{aligned} & (1-i\omega^2) + (1-i\omega) \\ &= 2-i(\omega^2+\omega) \\ &= 2+i \end{aligned}$$

حاصل ضرب الجذرين

$$\begin{aligned} & (1-i\omega^2)(1-i\omega) \\ &= 1-i\omega-i\omega^2+i^2\omega^3 \\ &= 1-i(\omega+\omega^2)+(-1)(1) \\ &= i \end{aligned}$$

$$x^2-(2+i)x+i=0$$

∴ المعادلة هي :

b)

مجموع الجذرين

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1-\omega} + \frac{2}{1-\omega^2} \\ &= \frac{2-2\omega+2-2\omega^2}{1-\omega^2-\omega+\omega^3} \\ &= \frac{4-2(\omega+\omega^2)}{2-(\omega+\omega^2)} \\ &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

حاصل ضرب الجذرين

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1-\omega} \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \\ &= \frac{4}{1-\omega^2-\omega+\omega^3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$x^2-2x+\frac{4}{3}=0$$

∴ المعادلة هي :

تمارين

1. اكتب المقادير الآتية في أبسط صورة:

a) ω^{64} b) ω^{-325} c) $\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}$ d) $(1+\omega^2)^{-4}$ e) ω^{9n+5} , $n \in \mathbb{w}$ حيث

2. كَوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

a) $1+\omega^2$, $1+\omega$

b) $\frac{\omega}{2-\omega^2}$, $\frac{\omega^2}{2-\omega}$

c) $\frac{3i}{\omega^2}$, $\frac{-3\omega^2}{i}$

3. إذا كان $z^2 + z + 1 = 0$ فجد قيمة $\frac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

a) $\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2}\right)^2 = -\frac{1}{3}$

b) $\frac{\omega^{14} + \omega^7 - 1}{\omega^{10} + \omega^5 - 2} = \frac{2}{3}$ 4. اثبت ان :

c) $\left(1 - \frac{2}{\omega^2} + \omega^2\right) \left(1 + \omega - \frac{5}{\omega}\right) = 18$

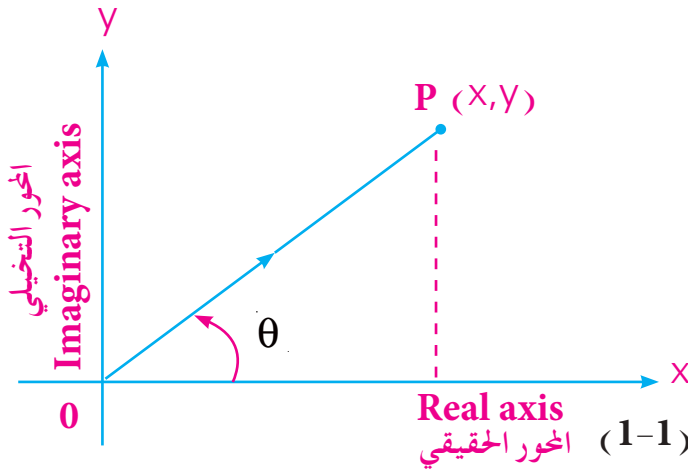
d) $(1+\omega^2)^3 + (1+\omega)^3 = -2$

[1-7] التمثيل الهندسي للأعداد المركبة.

Geometric Representation of Complex Numbers.

إذا كان E^2 (أو R^2) يمثل المستوي الاقليدي المتعامد الاخيرين. فانه باقران كل عدد مركب $x+yi$ (حيث $x, y \in R$) بالنقطة (x, y) في E^2 نحصل على تطبيق تقابل من E الى R^2 . وفي هذا المستوي سنمثل هندسياً بعض العمليات الجبرية البسيطة في الجمع والطرح في E والتي تقابل هندسياً العمليات في E^2 (أو R^2).

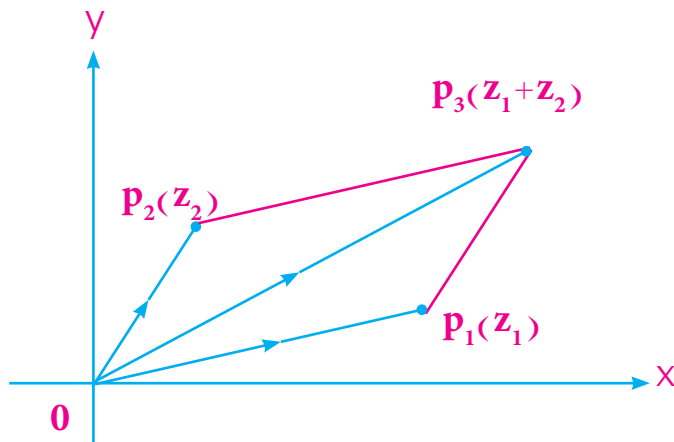
سوف نتناول في هذا البند والبنود اللاحقة تمثيل بعض العمليات على الأعداد المركبة هندسياً والتي سنطلق على الاشكال التي تمثلها اشكال ارجاند نسبة الى العالم (J. R. Argand, 1768 – 1822) وسمي المستوي باسم العالم الالماني الشهير غاوس، بمستوي غاوس (C.F. Gauss 1777–1855) أو بشكل مبسط المستوي المركب (Complex Plane)



الشكل (1-1)

اذ يسمى المحور السيني (x-axis) بالمحور الحقيقي حيث يمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب اما المحور الصادي (y-axis) فيطلق عليه اسم المحور التخيلي والذي يمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب. وبالتالي فان العدد المركب

$x + yi$ يُمثل هندسياً بالنقطة (x, y) لاحظ الشكل (1-1)



الشكل (1-2)

لو كان $z_1 = x_1 + y_1 i$ ، $z_2 = x_2 + y_2 i$

عددان مركبان ممثلان بالنقطتين

$P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ فان :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

ويمكن تمثيل $z_1 + z_2$ بالنقطة

$$P_3(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

مستخدمين المعلومات المتعلقة بالمتجهات.

كما في الشكل (1-2) :

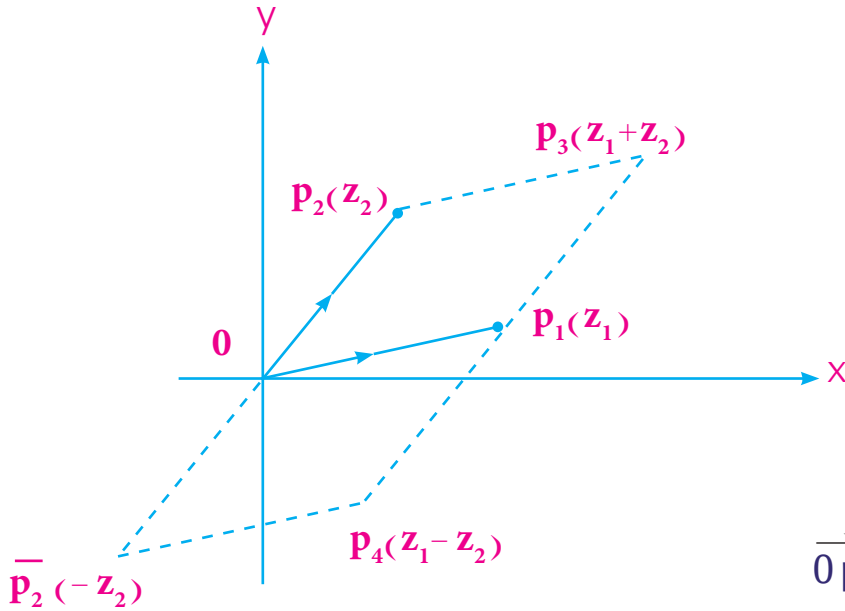
$$\vec{0p_1} + \vec{0p_2} = \vec{0p_3} \text{ اي ان}$$

ان العدد المركب $x + yi$ يمكن تمثيله بالمتجه $\vec{0p}$ وعليه يكون جمع عددين مركبين هو جمع متجهين.

اذا اعتبرنا $\vec{p_2}$ يمثل العدد المركب z_2 فإن $\vec{p_2}$ هي ناتجة من دوران $\vec{0p_2}$ حول 0 نصف دورة ، وعليه فإن :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

والذي يقترن بالنقطة p_4 حيث $\vec{0p_1} \vec{p_4} \vec{p_2}$ يشابه متوازي الاضلاع $\vec{0p_1} \vec{p_3} \vec{p_2}$ كما في الشكل (1-3).



الشكل (1-3)

$$\vec{0p_4} = \vec{p_2} \vec{p_1} = \vec{0p_1} - \vec{0p_2}$$

أي أن

ملاحظة

(1) ليكن k عدد حقيقي لا يساوي الصفر . z عدد مركب فان النقطة التي تمثل kz يمكن الحصول عليها بواسطة التكبير الذي مركزه 0 ومعامله الثابت k .

(2) لكل عدد مركب z فان النقطة iz يمكن الحصول عليها من دوران ربع دورة عكس عقارب الساعة.

مثل العمليات الآتية هندسياً في شكل ارجاند :

a) $(3+4i) + (5+2i)$

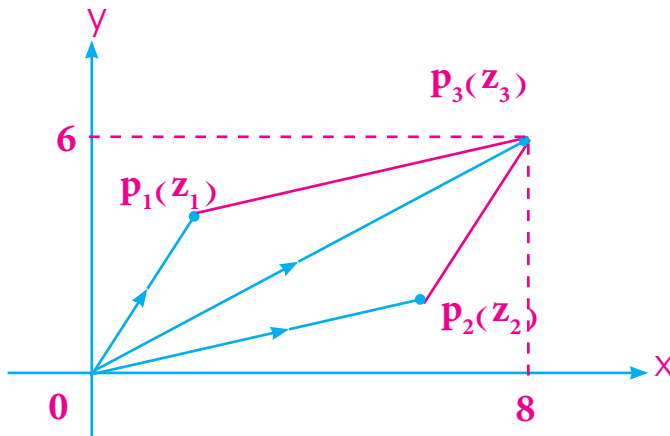
b) $(6-2i) - (2-5i)$

الحل :

a) $(3+4i) + (5+2i) = 8+6i$

$$z_1 = 3+4i \Rightarrow p_1(z_1) = p_1(3, 4)$$

$$z_2 = 5+2i \Rightarrow p_2(z_2) = p_2(5, 2)$$



لاحظ : $\vec{op_1} + \vec{op_2} = \vec{op_3}$

وهو مشابه الى جمع المتجهات .

ويكون $0p_1 p_3 p_2$

متوازي اضلاع قطره هو $\vec{op_3}$

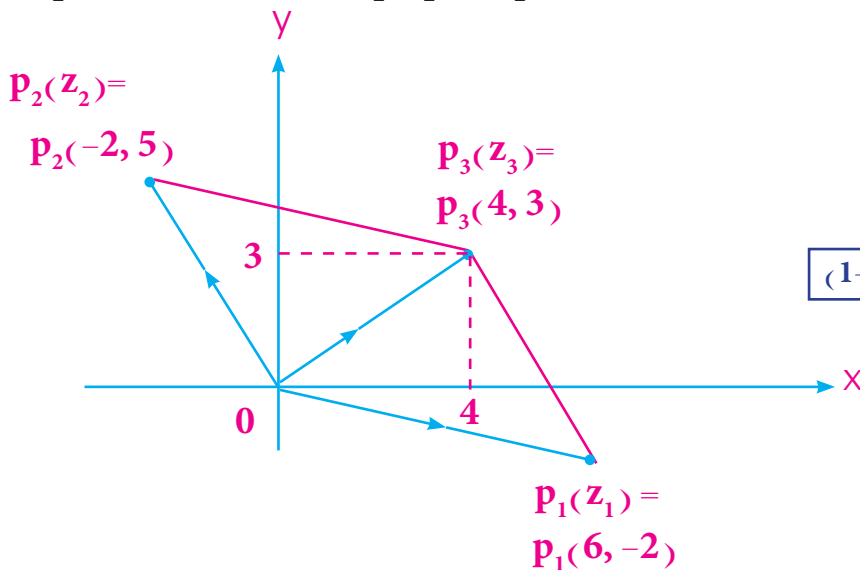
الشكل (1-4)

$$z_1 + z_2 = z_3 = 8 + 6i \Rightarrow p_3(z_3) = p_3(8, 6)$$

b) $(6-2i) - (2-5i) = (6-2i) + (-2+5i) = 4+3i$

$$z_1 = 6-2i \Rightarrow p_1(z_1) = p_1(6, -2)$$

$$z_2 = -2+5i \Rightarrow p_2(z_2) = p_2(-2, 5)$$



الشكل (1-5)

$$z_3 = 4+3i \Rightarrow p_3(z_3) = p_3(4, 3)$$

تمارين

1. اكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد الآتية ثم مثل هذه الأعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند.

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 + 3i, \quad z_3 = 1 - i, \quad z_4 = i$$

2. اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثل الأعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند.

$$z_1 = 5 + 3i, \quad z_2 = -3 + 2i, \quad z_3 = 1 - i, \quad z_4 = -2i$$

3. إذا كان $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلا من :

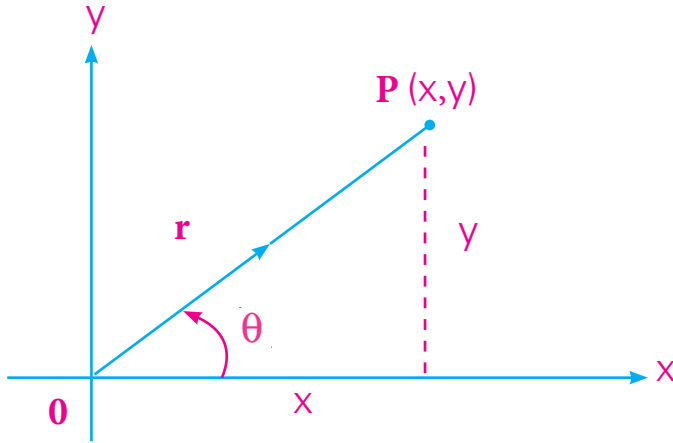
$$z, \bar{z}, -z$$

4. إذا كان $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلا من :

$$-3z_2, \quad 2z_1, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 + z_2$$

[1-8] الصيغة القطبية Polar Form للعدد المركب.

في البنود السابقة درسنا العدد المركب بصيغته الجبرية $z = x + yi$ والديكارتية $z = (x, y)$ وفي هذا البند سندرس صيغة أخرى للعدد المركب تدعى بالصيغة القطبية . وتحويل أحدهما إلى الأخرى . فلو كان لدينا العدد المركب $z = x + yi$ ومثلناه بالنقطة $p(x, y)$ كما في الشكل (1-6) فإن :



الشكل (1-6)

هما الاحداثيان القطبيان (r, θ) للنقطة p حيث θ يمثل القطب و $\vec{ox}$ يمثل الضلع الابتدائي، وهذا يعني أن :

$$r = \|\vec{op}\| \text{ وان } \theta = m(\vec{ox}, \vec{op})$$

ويكون قياس θ من $\vec{ox}$ إلى $\vec{op}$ باتجاه عكس عقارب الساعة إذا كان القياس موجباً، ومع اتجاه عقارب الساعة إذا كان القياس سالباً ويكون بالقياس الدائري وعليه فإن :

$$R(z) = x = r \cos \theta \dots (1)$$

$$I(z) = y = r \sin \theta \dots (2)$$

حيث $R(z)$ يرمز للجزء الحقيقي للعدد المركب z بينما $I(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد المركب z

(Modulus of Complex Number) r يسمى مقياس العدد المركب z

وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ "mod z " أو مقياس z ويرمز له $\|z\|$ حيث $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ومن العلاقتين (1) و (2) نحصل على :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|z\|}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|z\|}$$

أما θ فقياسها يسمى سعة العدد المركب **(Argument of Complex Number)**

واختصاراً تكتب بالشكل $\theta = \arg(z)$

يمكن ان تاخذ θ عدداً غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الاخرى بعدد صحيح من الدورات.

ملاحظة

فاذا كانت θ سعة عدد مركب فان كلاً من الاعداد : $\theta + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح يكون ايضاً سعة لنفس العدد المركب .

اما اذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ الدالة على سعة العدد المركب فيقال لها القيمة الاساسية لسعة العدد المركب (Principle Value).

مثال - 23

اذا كان $z = 1 + \sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{mod } z &= \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{1+3} = 2 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج ان θ في الربع الاول

$$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

مثال - 24

اذا كان $z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

نستنتج ان θ في الربع الثالث

$$\therefore \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

ملاحظة

1) ان سعة العدد المركب $z = 0$ غير معرفة وذلك لان المتجه الصفري ليس له اتجاه.

2) ممكن الافادة من المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب بكتابة العدد المركب $z = x + yi$ بصورة اخرى تسمى الصيغة القطبية Polar Form وكما يأتي :

$$\therefore x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\therefore z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = \|z\| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$$

او

حيث $\theta = \arg(z)$ ، $r = \text{mod } z = \|z\|$ هي سعة العدد المركب z

مثال - 25

عبر عن كل من الاعداد الآتية بالصيغة القطبية :

a) $-2 + 2i$ b) $2\sqrt{3} - 2i$

الحل :

a) $z = -2 + 2i$

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

θ تقع في الربع الثاني

الصيغة القطبية للعدد المركب z هي :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

b) $z = 2\sqrt{3} - 2i$

$$\text{mod } z = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$\therefore$ الصيغة القطبية للعدد المركب z هي : $z = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$

عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصيغة القطبية :

a) 1

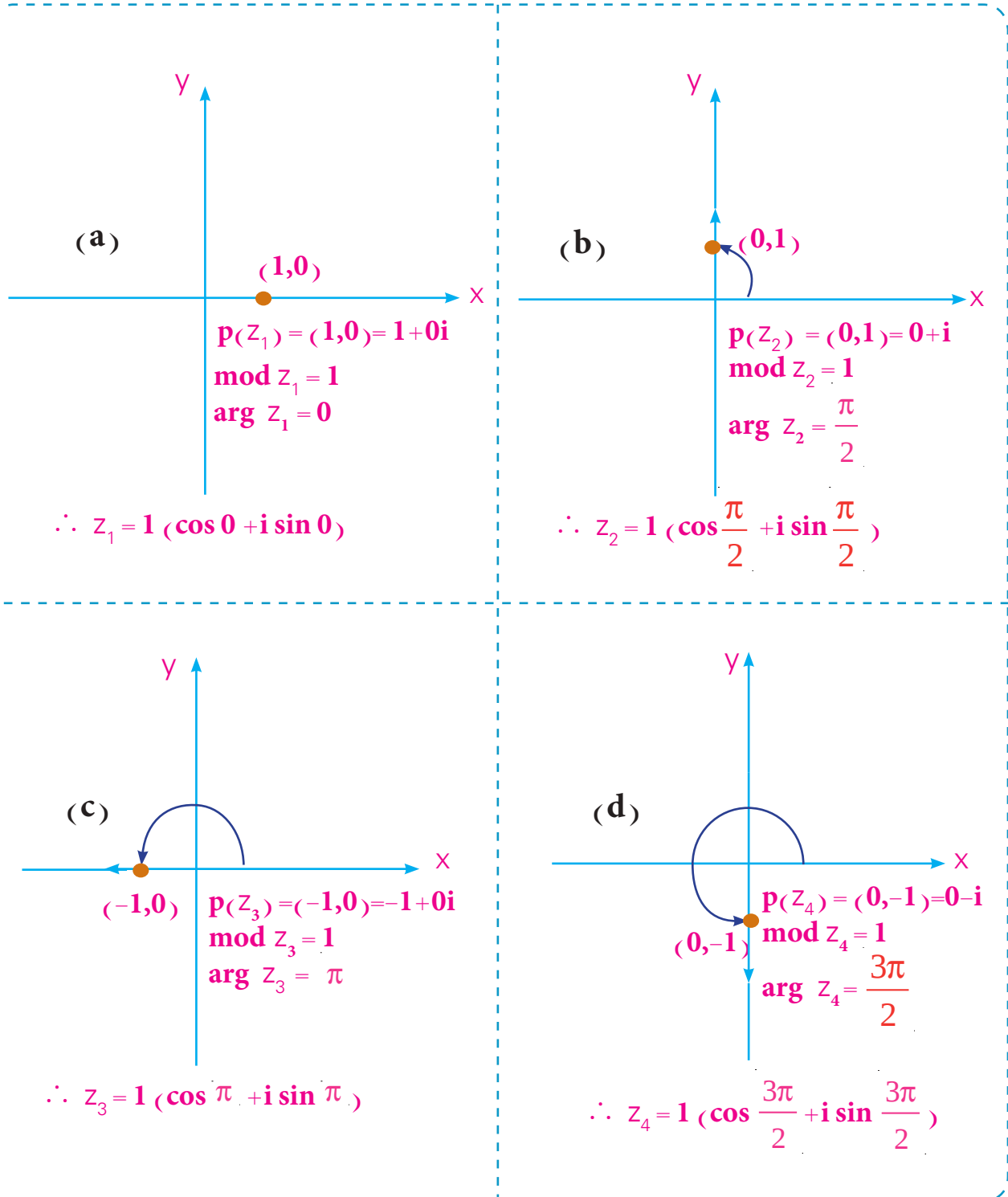
b) i

c) -1

d) -i

الحل :

لاحظ الأشكال الآتية :



الشكل (1-7)

من المثال السابق نستنتج الآتي :

$$1 = (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$-1 = (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$i = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$-i = (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

وبتطبيق الاستنتاج السابق يمكن أن نضع :

$$3 = 3 \times 1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$-2 = 2 \times (-1) = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$5i = 5 \times i = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$-7i = 7 \times (-i) = 7(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

[1-9] مبرهنة دي موافر.

De Moivre's Theorem

z_2, z_1 يمكن أن تكتب بصورة : $z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$, $z_2 = \cos \phi + i \sin \phi$

والآن سنجد $z_1 \cdot z_2$ بالصيغة القطبية

$$z_1 \times z_2 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$= \cos \theta \cos \phi + i \cos \theta \sin \phi + i \sin \theta \cos \phi + i^2 \sin \theta \sin \phi$$

$$= [\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi] + i [\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi] = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \text{ فان العلاقة تصبح } (\phi = \theta) \text{ ولو كان}$$

ويمكن برهنتها كما يأتي :

$$\text{LHS} = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i(2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \cos 2\theta + i \sin 2\theta = \text{RHS}$$

وقد توصل العالم دي موافر (1664-1754) الى تعميم العلاقة والتي سميت بمبرهنة دي موافر .

De Moivre's Theorem

مبرهنة ديموافر

لكل $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

البرهان : (للاطلاع فقط)

سنتوصل الى برهان هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي وكما يأتي :

1) لنعتبر $n=1$ فان العلاقة تصبح :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos 1\theta + i\sin 1\theta$$
 وهي عبارة صحيحة .

2) لناخذ $k \geq 1$ ونفترض ان العلاقة صحيحة لكل $n=k$.

أي ان $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ صحيحة فرضاً .

3) يجب ان نثبت ان العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^1 (\cos\theta + i\sin\theta)^k$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$

$$= \cos(\theta + k\theta) + i\sin(\theta + k\theta)$$

$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

وعليه فاذا كانت العلاقة صحيحة عند n أي $n=k, k \geq 1$ فهي كذلك صحيحة عند $n=k+1$

وبواسطة الاستقراء الرياضي فان المبرهنة تعتبر صحيحة لجميع قيم n .

$$(\cos \frac{3}{8}\pi + i\sin \frac{3}{8}\pi)^4$$

مثال - 27
احسب

الحل :

$$(\cos \frac{3}{8}\pi + i\sin \frac{3}{8}\pi)^4$$

$$= \cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1) = -i$$

بين انه لكل $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ فان:

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n \theta - i \sin n \theta$$

الحل :

$$\text{LHS} = (\cos \theta - i \sin \theta)^n = [\cos \theta + (-i \sin \theta)]^n \quad \text{الطرف الايسر}$$

$$= [\cos \theta + i \sin(-\theta)]^n$$

$$= [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]^n$$

وبجعل $\phi = -\theta$ تصبح العلاقة

$$= [\cos \phi + i \sin \phi]^n$$

$$= \cos n \phi + i \sin n \phi$$

$$= \cos(-n \theta) + i \sin(-n \theta)$$

$$= \cos n \theta - i \sin n \theta$$

الطرف الايمن

$$= \text{RHS} \quad (\text{و. ه. م.})$$

نتيجة لمبرهنة دي موافر:

$$\text{لكل } \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ فان}$$

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

احسب باستخدام مبرهنة دي موافر $(1+i)^{11}$

الحل :

$$z = 1+i$$

$$\text{mod } z = \sqrt{2}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \therefore \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\therefore (1+i)^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{11}$$

$$= 2^{\frac{11}{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right)$$

$$= 2^{\frac{11}{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$= 2^{\frac{11}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2^5 \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2^5 (-1+i) = 32(-1+i)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = (\cos \theta - i \sin \theta)$$

ملاحظة

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل الآتي :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \cos n \theta - i \sin n \theta$$

حل المعادلة

مثال - 30

$$x \in \mathbb{C} \text{ حيث } x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 = -1$$

$$x^3 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\therefore x = (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore x = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

$$k = 0, 1, 2$$

لأنه جذر تكعيبي

حيث

الحل :

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

بوضع $k=0$ يكون

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_2 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$= -1 + i(0)$$

بوضع $k=1$ يكون

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

بوضع $k=2$ يكون

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إذاً مجموعة الحل للمعادلة هي : $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$

مثال - 31 : أوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له

الحل : ليكن $z = \sqrt{3} + i$ نضع z بالصيغة القطبية :

$$\|z\| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow z^2 = 2^2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2$$

$$z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} &= 4^{\frac{1}{5}} \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]^{\frac{1}{5}} \\ &= \sqrt[5]{4} \left[\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \right] \end{aligned}$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$ لانه جذر خامس

$$Z_1 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right) \quad \text{وبوضع } k=0 \text{ يكون}$$

$$Z_2 = \sqrt[5]{4} \left[\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right] \quad \text{وبوضع } k=1 \text{ يكون}$$

$$Z_3 = \sqrt[5]{4} \left[\cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right] \quad \text{وبوضع } k=2 \text{ يكون}$$

$$Z_4 = \sqrt[5]{4} \left[\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right] \quad \text{وبوضع } k=3 \text{ يكون}$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left[\cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15} \right] \quad \text{وبوضع } k=4 \text{ يكون}$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left[\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right]$$

تمارين

1. احسب ما يأتي:

a) $\left[\cos \frac{5}{24} \pi + i \sin \frac{5}{24} \pi \right]^4$

b) $\left[\cos \frac{7}{12} \pi + i \sin \frac{7}{12} \pi \right]^3$

2. احسب باستخدام مبرهنة دي موافر (او التعميم) ما يأتي:

a) $(1-i)^7$

b) $(\sqrt{3}+i)^9$

3. بسط ما يأتي:

a) $\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3}$

b) $(\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta - i \sin \theta)^4$

Hint : $x^4 y^4 = (xy)^4$

4. جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1 + \sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر ثم الطريقة المعروضة في البند [1-4].

5. باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$.

6. جد الجذور الاربعة للعدد (-16) باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر.

7. جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر.