

الفصل الثالث

Chapter Three

تطبيقات التفاضل

- [3-1] المعدلات المرتبطة
- [3-2] مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة
- [3-3] اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الاولى
- [3-4] النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية
- [3-5] تقعر وتحذب المنحنيات ونقط الانقلاب
- [3-6] اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية
- [3-7] رسم المخطط البياني للدالة
- [3-8] تطبيقات عملية على القيم العظمى او الصغرى.

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
التغير التقريبي عند a	$hf'(a), h = b - a$

تمهيد : لقد سبق أن تعلمت في الصف الخامس العلمي متى تكون الدالة قابلة للاشتقاق وتعرفت على قواعد ايجاد مشتقات الدوال الجبرية والدائرية والتفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة وفي هذا الفصل سنتناول بعض المفاهيم الاخرى وبعض استعمالات وتطبيقات حساب التفاضل

[3-1] المعدلات المرتبطة Related Rates

إذا وجد أكثر من متغير بحيث تتوقف قيمة كل من هذه المتغيرات على متغير واحد يسمى (بارامتر) ومثالهُ الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعاً لتغيره وحيث أن العلاقة هي ارتباط فإننا نسمي المعدلات الزمنية هذه بالمعدلات الزمنية المرتبطة وأحياناً بالمعدلات المرتبطة أو المعدلات الزمنية فقط ، فمثلاً إذا كان

$$y = g(t), x = f(t)$$

فالمتغيران x, y متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل t ، فمن الممكن ربط المتغيرين ببعضهما ، ويمكن أن نجد معدل تغير كل منهما وكما يأتي : $\frac{dx}{dt} = f'(t), \frac{dy}{dt} = g'(t)$ والنتيجة يمثّلان المعدلين الزمنيين لتغير كل من y, x

وقد يتوافر الربط بين المتغيرين في مسألة ما بمعادلة وفي هذه الحالة نشق الطرفين بالنسبة للزمن t فعلى سبيل المثال من المعادلة $x^2 + y^2 - 4y + 6x = 0$ يمكن إيجاد المعدل الزمني لتغير كل من x, y وكما يلي :

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 4y + 6x) = \frac{d}{dt}(0) \Rightarrow$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 4 \frac{dy}{dt} + 6 \frac{dx}{dt} = 0$$

فيكون : المعدل الزمني لتغير y يساوي $\frac{dy}{dt}$

والمعدل الزمني لتغير x يساوي $\frac{dx}{dt}$

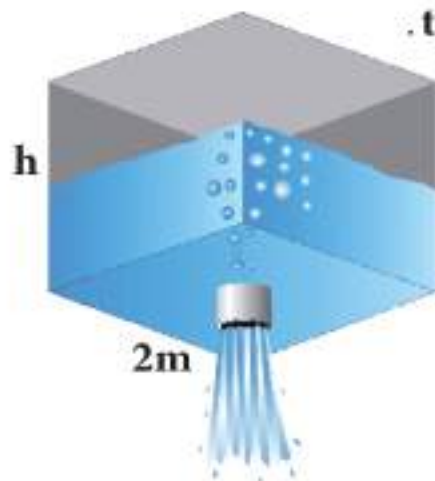
حل أي سؤال يتعلق بالمعدلات المرتبطة حاول إتباع ما يلي إن أمكن:

ملاحظة

- 1) ارسم مخططاً للمسألة (أن احتجت الى ذلك) وحدد المتغيرات والثوابت وضع لها الرموز وحدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال .
 - 2) حاول إيجاد علاقة أخرى بين المتغيرات لكي تقلل من عدد المتغيرات .
 - 3) نشق الطرفين بالنسبة للمتغير (الزمن) t .
 - 4) عوض معطيات السؤال من المتغيرات بعد الاشتقاق .
- والامثلة التالية توضح ذلك :

مثال -1-

خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4 \text{ m}^3 / \text{h}$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t .



الحل

ليكن حجم الماء في الخزان عند أي زمن t هو $v(t)$
(تسرب) $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -0.4$ (الإشارة السالبة تعني نقصان)

وليكن ارتفاع الماء في الخزان عند أي زمن هو h والمطلوب إيجاد $\frac{dh}{dt}$
أن الماء يأخذ شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة

$$\therefore V = Ah, \quad A = \text{مساحة القاعدة}$$

$$V = (2)(2)h \Rightarrow V = 4h$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4 \frac{dh}{dt}$$

$$-0.4 = 4 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1 \text{ m / s}$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان 0.1 m / s

مثال -2-

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي 96 cm^2 . يتمدد طولها بمعدل 2 cm / s بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8 cm .

الحل

في أية لحظة ما نفرض طول المستطيل x

وعرض المستطيل y

$$\text{معدل تغير الطول} \quad \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm / s}$$

معدل تغير العرض $\frac{dy}{dt} = ?$

$$A = xy$$

$$\therefore 96 = xy.$$

$$\therefore y = 8 \Rightarrow x = 12$$

$$\frac{d}{dt}(96) = \frac{d}{dt}(xy)$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة الى t

$$0 = x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$0 = 12 \frac{dy}{dt} + 8(2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3} \text{ cm/s}$$

$\therefore$ العرض يتناقص بمعدل $\frac{4}{3} \text{ cm/s}$ في تلك اللحظة

مثال - 3 - مكعب صلد طول حرفه 8 cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6 \text{ cm}^3 / \text{s}$ فجد معدل النقصان بسلك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك 1 cm .

الحل

نفرض سمك الجليد في أية لحظة x والمطلوب حساب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد - حجم المكعب الأصلي

$$V = (8 + 2x)^3 - 8^3$$

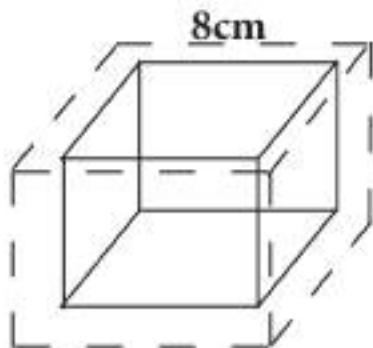
$$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2 (2) \frac{dx}{dt} - 0$$

وبالتعويض عن القيم المعطاة نحصل على:

$$-6 = 3(8 + (2)(1))^2 \cdot 2 \frac{dx}{dt}$$

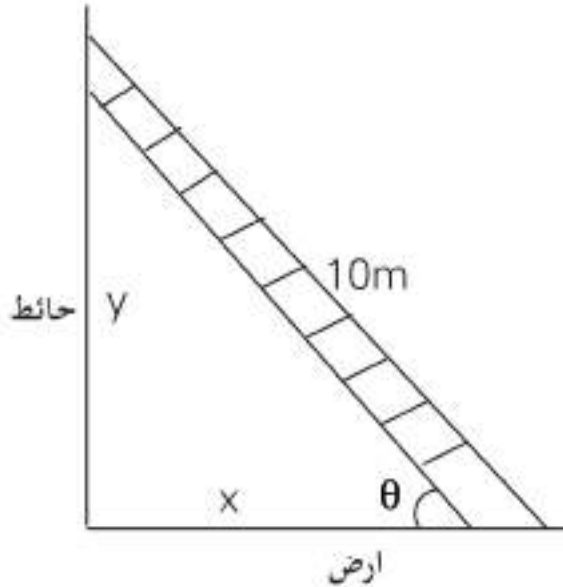
$$\frac{dx}{dt} = -0.01 \text{ cm/s}$$

$\therefore$ معدل نقصان سمك الجليد 0.01 cm/s



مثال - 4

سلم طوله 10m يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m/s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m عن الحائط جد :



1) معدل انزلاق الطرف العلوي .

2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض .

الحل

نفرض عند أية لحظة :

$\frac{dx}{dt} = 2$, x = بعد الطرف الاسفل عن الحائط

y = بعد الطرف الأعلى عن الأرض .

قياس الزاوية بين السلم والأرض θ (نصف قطرية)

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس نحصل على :

$$1) \quad x^2 + y^2 = 100$$

$$\therefore \quad x = 8 \Rightarrow y = 6$$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(100) \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

وبالتعويض عن القيم المعلومة نحصل على :

$$(2)(8)(2) + (2)(6) \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}$$

معدل انزلاق الطرف العلوي $-\frac{8}{3} \text{ m/s}$

$$2) \quad \sin \theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\sin \theta) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{10} \right) \Rightarrow \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x}{10} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt} \quad \text{ينتج} \quad \cos \theta = \frac{x}{10} \quad \text{وبالتعويض عن}$$

$$\text{ومن التعويض بقيمة } x=8 \text{ وعن قيمة } \frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3} \text{ نحصل على:}$$

$$\frac{8}{10} \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{10} \right) \left(\frac{-8}{3} \right)$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3} \text{ rad/s} \quad \text{سرعة تغير الزاوية}$$

مثال -5-

مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل، ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5\text{cm}^3/\text{s}$ بينما يتسرب منه السائل $1\text{cm}^3/\text{s}$ ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm .

الحل

نفرض بعدي المخروط المائي

(نصف القطر = r والارتفاع = h) عند أية لحظة

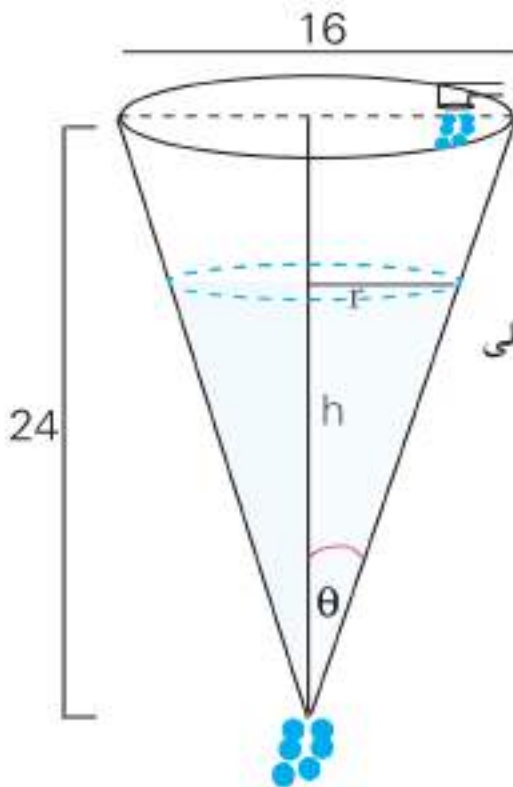
نفرض حجم السائل عند أية لحظة $v(t)$

في الشكل المجاور من استعمال $\tan \theta$ أو من تشابه مثلثين نحصل على

$$\tan \theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3} h$$

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{3} h \right)^2 h = \frac{1}{27} \pi h^3$$



$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{9} \pi h^2 \frac{dh}{dt} \dots (1)$$

معدل تغير حجم السائل في المخروط = معدل الصب - معدل التسرب .

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

وبالتعويض في (1) ينتج

$$4 = \frac{1}{9} \pi (12)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi} \text{ cm/s}$$

مثال - 6

لتكن M نقطة متحركة على منحنى القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل

ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2unit / s ، جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x=4$.

لتكن $M(x,y)$ ولتكن $N(7,0)$ ولتكن المسافة MN تساوي S

الحل

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

وبالتعويض عن $y^2 = 4x$ ينتج

$$\Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{8-10}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1 \text{ unit/s}$$

تمارين

1. سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا أنزل الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2m/s ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$.
2. عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعداً عن العمود وبسرعة 30m/min ، جد معدل تغير طول ظل الرجل .
3. لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$ ، جد احداثيي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0, \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M .
4. جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t .
5. متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3cm/s ، وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5cm/s ، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4cm والارتفاع 3cm .

[3-2] مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة Rolles and Mean Value Theorems

قبل أن نتعرف في هذا البند الى مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة نذكر بعض التعاريف والمبرهنة التي تمهد لهاتين المبرهنتين: (للاطلاع)

تعريف (3-2-1)

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن:

1 f تأخذ قيمة عظمى عند c حيث $c \in [a, b]$ اذا فقط اذا
 $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

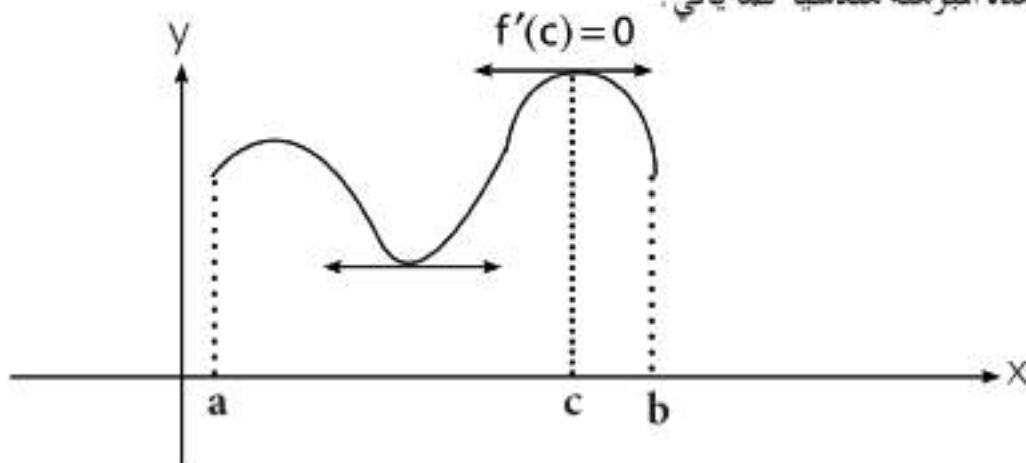
2 f تأخذ قيمة صغرى عند c حيث $c \in [a, b]$ اذا فقط اذا
 $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

مبرهنة (3-2-2)

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وكان:

للدالة f قيمة عظمى أو صغرى عند c حيث $c \in (a, b)$ وأن $f'(c)$ موجودة
 فإن $f'(c) = 0$

وسنكتفي بتوضيح هذه المبرهنة هندسياً كما يأتي:



عند النقطة c المختلفة عن a, b والتي تأخذ عندها الدالة قيمة عظمى أو صغرى يكون المماس للمنحني البياني للدالة أفقياً (أي موازي لمحور السينات) والآن يمكن أن تفكر في إجابة للسؤال الآتي:

إذا كان للدالة f قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند c حيث $c \in (a, b)$ فهل يشترط أن يكون $f'(c) = 0$ ؟ وللإجابة على السؤال اليك المثال الآتي :

مثال -1-

لتكن $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

وكما تلاحظ في الشكل أدناه فإن

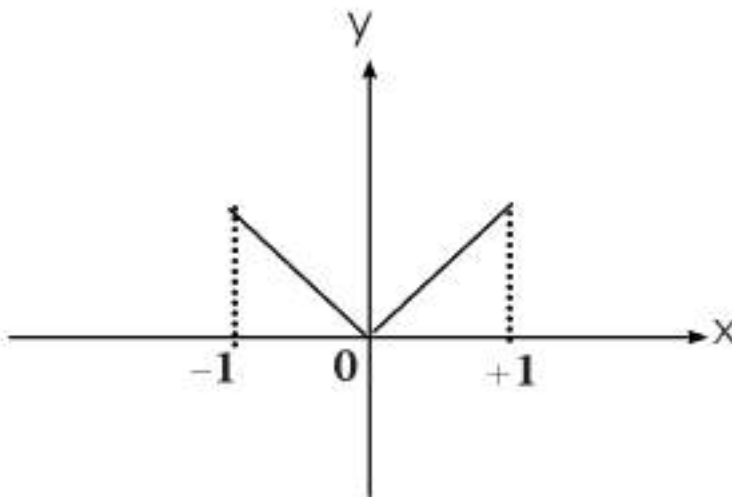
الدالة f تمتلك اعظم قيمة عند كل من $x = 1, x = -1$

وتمتلك اصغر قيمة عند $x = 0$

وانت تعلم من دراستك السابقة أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

أي أن $f'(0)$ غير موجودة .

∴ لا يشترط أن يكون $f'(c) = 0$



تعريف (3-2-3)

لتكن الدالة f معرفة عند العدد c . يقال عن العدد c بأنه عدد حرج (Critical Number) إذا كان $f'(c) = 0$ أو ان الدالة غير قابلة للاشتقاق في c وتسمى النقطة $(c, f(c))$ بالنقطة الحرجة

ففي المثال السابق :

$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \in f(x) = |x|$

تلاحظ أن الدالة معرفة عند صفر ، وأن $f'(0)$ غير موجودة

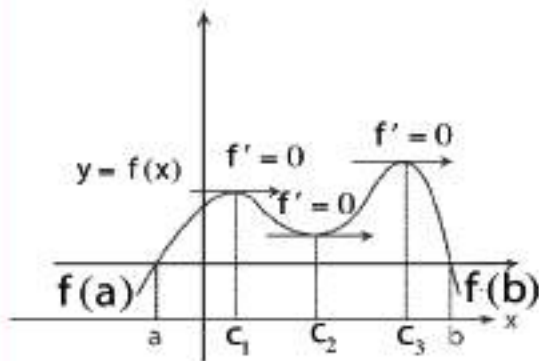
لذا يقال أن العدد "صفر" هو العدد الحرج للدالة f وأن النقطة $(0, f(0))$ هي النقطة الحرجة .

Rolle's Theorem مبرهنة رول

مبرهنة رول : لقد وضع العالم الفرنسي (متشل رول) مبرهنة مبسطة لإيجاد نقط تمثل نقاطاً حرجية للدالة في الفترة المعطاة وسميت هذه المبرهنة باسمه .

Rolle's Theorem

(3-2-4) مبرهنة رول



إذا كانت الدالة f :

1 (مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$)

2 (قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b))

3 $f(b) = f(a)$)

فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a, b) وتحقق : $f'(c) = 0$

بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية؟ وجد قيمة c الممكنة :

مثال - 2 -

a) $f(x) = (2-x)^2$, $x \in [0, 4]$

b) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$, $x \in [-1, 1]$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \in [-1, 2] \\ -1 & , x \in [-4, -1) \end{cases}$

d) $f(x) = k$, $x \in [a, b]$

a) $f(x) = (2-x)^2$, $x \in [0, 4]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 4]$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 4)$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثالث : $f(0) = (2-0)^2 = 4$

$f(4) = (2-4)^2 = 4 \Rightarrow f(0) = f(4)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول .

$$f'(x) = -2(2-x)$$

$$f'(c) = -2(2-c)$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -2(2-c) = 0$$

$$\therefore c = 2 \in (0,4)$$

$$b) f(x) = 9x + 3x^2 - x^3, \quad x \in [-1,1]$$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها كثيرة الحدود .

$$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5 \quad \text{الشرط الثالث :}$$

$$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11 \Rightarrow f(-1) \neq f(1)$$

لا تتحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق .

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in [-1,2] \\ -1 & x \in [-4,-1) \end{cases}$$

الحل

مجال الدالة $[-4,2]$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 + 1) = 2 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (-1) = -1 = L_2 \end{cases}$$

الشرط الاول :

الدالة ليست مستمرة لأن $L_1 \neq L_2$ في الفترة $[-4,2]$

∴ لا تتحقق مبرهنة رول

$$d) f(x) = k, \quad x \in [a,b]$$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على $[a,b]$ لأنها دالة ثابتة .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) .

$$f(a) = f(b) = k \quad \text{الشرط الثالث :}$$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول . وان قيمة c يمكن ان تكون اي قيمة ضمن الفترة (a,b) .

The Mean Value Theorem

[3-2-5] مبرهنة القيمة المتوسطة

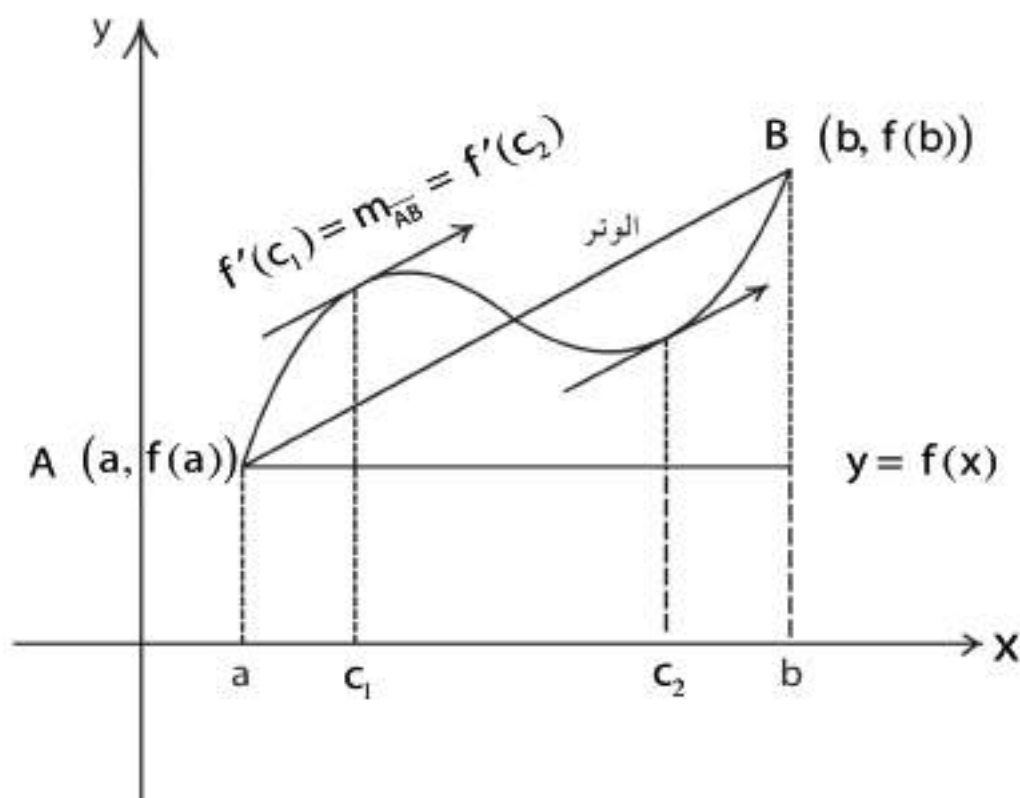
إذا كانت f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة C ينتمي الى (a, b) وتحقق:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

أو $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

والمخطط التالي يعطي التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة:

المماس يوازي الوتر $\overline{AB}$



ميل الوتر المار بالنقطتين A, B يساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ميل المماس للمنحني عند $C =$ المشتقة الاولى للدالة f عند C , $(f'(c))$

لكن المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلاهما $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

أن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب توافر شرط ثالث هو : $f(a) = f(b)$

أي أن الوتر والمماس يوازيان محور السينات

أي فرق الصادات -0 لذا يصبح الميل -0 فنحصل على : $f'(c) = 0$

مثال -3-

برهن ان الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c :

a) $f(x) = x^2 - 6x + 4, x \in [-1, 7]$

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x \in [-4, 0]$

الحل

a) $f(x) = x^2 - 6x + 4, x \in [-1, 7]$

الشرط الأول يتحقق : الدالة مستمرة في الفترة $[-1, 7]$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثاني يتحقق : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 7)$ لأنها دالة كثيرة الحدود .

$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(c) = 2c - 6$ ميل المماس

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(7) - f(-1)}{7 + 1} = \frac{11 - 11}{8} = 0$

ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$0 = 2c - 6 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$

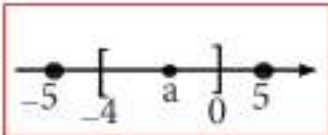
b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in [-4, 0]$

الحل

مجال f = مجموعة حل المتباينة $25 - x^2 \geq 0$ أي $[-5, 5]$

(1) استمرارية f في $[-4, 0]$: نثبت الاستمرارية أولاً في الفترة المفتوحة $I = (-4, 0)$ بعدها

عن طرفي الفترة .



لتكن $a \in I \Leftrightarrow f(a) = \sqrt{25 - a^2} \in \mathbb{R}$ لأن a ضمن مجال الدالة

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - a^2} \Rightarrow f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 = f(-4) \quad \therefore \text{مستمرة في } (-4, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 0} = 5 = f(0)$$

$\therefore f$ مستمرة عند طرفي الفترة $[-4, 0] \Leftrightarrow f$ مستمرة على الفترة المغلقة $[-4, 0]$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

(2) قابلية الاشتقاق : مجال $f' = (-5, 5) \Leftrightarrow f$ قابلة للاشتقاق في الفترة $(-4, 0)$ لأنها محتواة

كلياً في مجال مشتقة f

(3) ميل المماس

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25 - c^2}}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(0) - f(-4)}{0 + 4} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$

ميل الوتر

$$\frac{1}{2} = \frac{-c}{\sqrt{25 - c^2}}$$

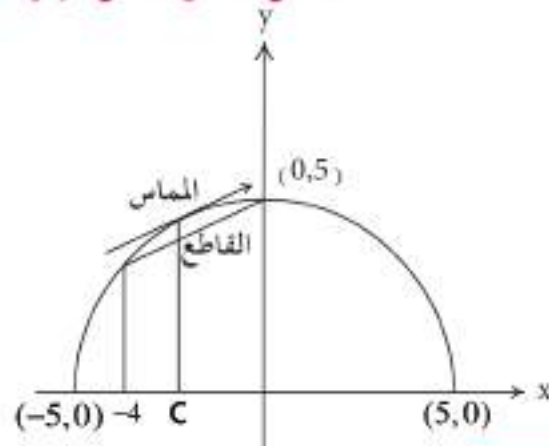
$$\sqrt{25 - c^2} = -2c \Rightarrow$$

$$25 - c^2 = 4c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \pm\sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{5} \notin (-4, 0)$$

$$c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$$

ميل المماس = ميل الوتر



مثال -4-

إذا كانت $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2$

وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة b .

الحل

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 8c \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -4 \text{ ميل المماس}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = b^2 - 4b \text{ ميل الوتر}$$

ميل المماس = ميل الوتر

$$\therefore b^2 - 4b = -4 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow (b - 2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2$$

[3-2-6] نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة ومعروفة على $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في (a, b) ولو اعتبرنا $h = b - a$ فإن $b = a + h$ حيث $h \neq 0, h \in \mathbb{R}$ فإنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على:

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(c)$$

وعندما يكون اقتراب b من a قريباً كافياً تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايتيه قريبتان من a أي أن المماس عند c سيكون مماساً للمنحني عند نقطة قريبة جداً من النقطة حيث $x=a$

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \text{ ولذلك يصبح:}$$

يقال للمقدار $hf'(a)$ التغير التقريبي للدالة.

التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

ملاحظة:- سوف نقتصر في حل تمارين التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة فقط

مثال -5- جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريباً مناسباً للعدد $\sqrt{26}$

الحل لتكن

$$y = f(x) = \sqrt{x} \dots \text{الدالة } x \geq 0$$

نفرض $a = 25$ (اقرب مربع كامل من العدد 26)

$$h = b - a = 1$$

$$f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\begin{array}{l} b = 26 \\ a = 25 \dots \text{القيمة السهلة} \\ \hline h = b - a \end{array}$$

$$f(b) \cong f(a) + (b - a)f'(a)$$

↓

↓

$$f(a + h) \cong f(a) + hf'(a)$$

ومن النتيجة:

$$\sqrt{26} = f(25 + 1) \cong f(25) + (1)f'(25)$$

$$\therefore \sqrt{26} \cong 5 + 1 \times (0.1) = 5.1$$

مثال - 6 -

إذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية

$$f(1.001)$$

الحل

$$f(1) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

$$f'(1) = 3 + 6 + 4 = 13$$

$$f(a+h); f(a) + hf'(a)$$

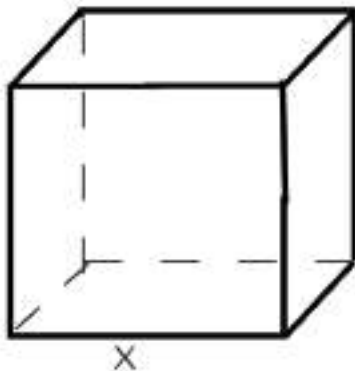
$$\begin{aligned} f(1.001) &= f(1) + (0.001)f'(1) \\ &= 13 + (0.001)(13) \\ &= 13.013 \end{aligned}$$

$$b = 1.001$$

$$a = 1$$

$$h = b - a = 0.001$$

مثال - 7 - مكعب طول حرفه 9.98cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.



ليكن V حجم المكعب الذي طول حرفه (x)

الحل

$$b = 9.98$$

$$a = 10$$

$$h = b - a = -0.02$$

أي ان الدالة تكون على الصيغة

$$v(x) = x^3$$

$$x \in [9.98, 10]$$

$$v(10) = 10^3 = 1000$$

$$v'(x) = 3x^2 \Rightarrow v'(10) = 3(10)^2 = 300$$

$$v(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300) \cong 994 \text{ cm}^3$$

مثال -8- لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 إلى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

الحل

الدالة : $f : [8, 8.06] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$$\begin{aligned} b &= 8.06 \\ a &= 8 = 2^3 \\ \hline h &= b - a = 0.06 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{المشتقة:}$$

$$f'(a) = f'(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$hf'(8) \cong (0.06) \frac{1}{3} = 0.02 \quad \text{التغير التقريبي}$$

مثال -9- يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10cm فإذا كان سمك الطلاء 0.15cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل

$$\begin{aligned} b &= 10.3 \\ a &= 10 \\ \hline h &= b - a = 0.3 \end{aligned}$$

$$v(x) = x^3$$

$$v'(x) = 3x^2$$

$$v'(a) = v'(10) = (3)(10)^2 = 300$$

$$hv'(10) \cong (0.3)(300) = 90\text{cm}^3 \quad \text{حجم الطلاء بصورة تقريبية}$$

مثال 10

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب

عشرية

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

b) $\sqrt[3]{7.8}$ على الأقل كلاً من :

c) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

الحل

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

$$f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} + 4x^3$$

الدالة : $f(x) = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$
المشتقة :

$$f(a) = f(1) = 1^{\frac{3}{5}} + 1^4 + 3 = 5$$

تعويض بالدالة :

$$f'(a) = f'(1) = \left(\frac{3}{5}\right)(1)^{-\frac{2}{5}} + (4)(1)^3 = 4.6$$

تعويض بالمشتقة :

تعويض بالقانون

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$

$$f(0.98) = f(1) + (-0.02) \cdot f'(1)$$

$$f(0.98) = 5 + (-0.02) \cdot (4.6)$$

$$f(0.98) = 5 - 0.092 = 4.908$$

$$\therefore \sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3 \cong 4.908$$

$$b = 0.98$$

$$a = 1$$

$$h = b - a = -0.02$$

b) $\sqrt[3]{7.8}$

الحل

الدالة : $f(x) = \sqrt[3]{x}$

المشتقة : $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b = 7.8$

$a = 8 = 2^3$

$h = b - a = -0.2$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

التعويض بالدالة :

$f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

التعويض بالمشتقة :

نحصل على $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

وبالتعويض بالقانون :

$$f(7.8) = f(8) + (-0.2)f'(8) \cong 2 - (0.2)(0.083)$$
$$= 2 - 0.0166 = 1.9834$$

$\therefore \sqrt[3]{7.8} \cong 1.9834$

c) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

الحل

الدالة : لتكن $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

المشتقة :

$f(16) = (2^4)^{\frac{1}{2}} + (2^4)^{\frac{1}{4}} = 4 + 2 = 6$

$b = 17$

$a = 16$

$h = b - a = 17 - 16 = 1$

تعويض بالدالة :

تعويض بالمشتقة :

$$f'(16) = \frac{1}{2}(2^4)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(2^4)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}(2^{-2}) + \frac{1}{4}(2^{-3}) = 0.5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0.25\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$f'(16) = (0.5)(0.5)^2 + (0.25)(0.5)^3 = (0.5)(0.25) + (0.25)(0.125) \\ = 0.125 + 0.031 = 0.156$$

التعويض بالقانون نحصل على

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$

$$f(17) \cong f(16) + (1)f'(16)$$

$$f(17) \cong 6 + (1)(0.156)$$

$$\therefore \sqrt{17} + \sqrt[4]{17} \cong 6.156$$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

الحل

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{الدالة}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

المشتقة

$$f(0.125) = ((0.5)^3)^{\frac{1}{3}} = 0.5$$

تعويض بالدالة

$$f'(0.125) = \frac{1}{3} [(0.5)^3]^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{3} (2)^2 = \frac{4}{3} = 1.333$$

تعويض بالمشتقة

وبالتعويض بالقانون نحصل على :

$$f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a)$$

$$f(0.12) \cong f(0.125) + (-0.005).(1.333)$$

$$f(0.12) \cong 0.5 - 0.006665$$

$$f(0.12) \cong 0.493335$$

$$\therefore \sqrt[3]{0.12} \cong 0.493335$$

$$b = 0.120$$

$$a = 0.125$$

$$h = b - a = -0.005$$

تمارين

1. اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

a) $f(x) = x^3 - 9x$, $x \in [-3, 3]$

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

c) $f(x) = (x^2 - 3)^2$, $x \in [-1, 1]$

2. جد تقريباً لكل مما يلي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة :

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

b) $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

d) $\frac{1}{101}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

4. كرة حجمها $84\pi \text{ cm}^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة .

5. مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي 2.98cm فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

6. بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c :

a) $f(x) = (x-1)^4$, $[-1, 3]$

b) $h(x) = x^3 - x$, $[-1, 1]$

c) $g(x) = x^2 - 3x$, $[-1, 4]$

d) $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$, $[0, 2\pi]$

7. اختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة إزاءها مع ذكر السبب وإن تحققت المبرهنة، جد قيم c الممكنة .

a) $f(x) = x^3 - x - 1$, $[-1, 2]$

b) $h(x) = x^2 - 4x + 5$, $[-1, 5]$

c) $g(x) = \frac{4}{x+2}$, $[-1, 2]$

d) $B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$, $[-2, 7]$

[3-3] اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الاولى.

The First Derivative Test For Increasing And Decreasing of a Function

[3-3-1] نتيجة

ان من النتائج المهمة لمبرهنة القيمة المتوسطة هي النتيجة الاتية :
لتكن f مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) فإذا كانت

$$1) f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \begin{pmatrix} \text{Increasing} \\ \text{متزايدة} \end{pmatrix}$$

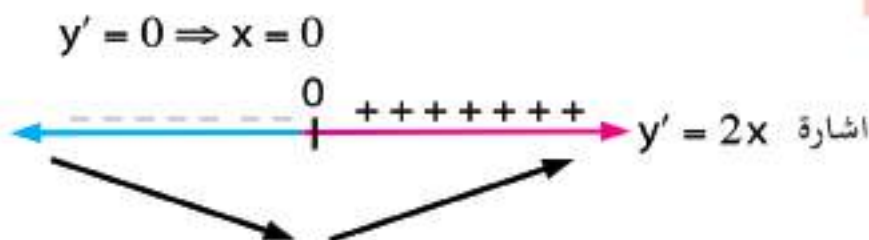
$$2) f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \begin{pmatrix} \text{Decreasing} \\ \text{متناقصة} \end{pmatrix}$$

أما بقية الحالات فسوف لانتطرق لها في هذه المرحلة.

مثال - 1 - لتكن $y = f(x) = x^2$. جد مناطق التزايد والتناقص

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

الحل



$$\therefore f'(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\therefore \{x : x > 0\} \text{ f متزايدة في }$$

$$\therefore f'(x) < 0, \forall x < 0$$

$$\therefore \{x : x < 0\} \text{ f متناقصة في }$$

مثال - 2

جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين الآتيتين:

الحل

a) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

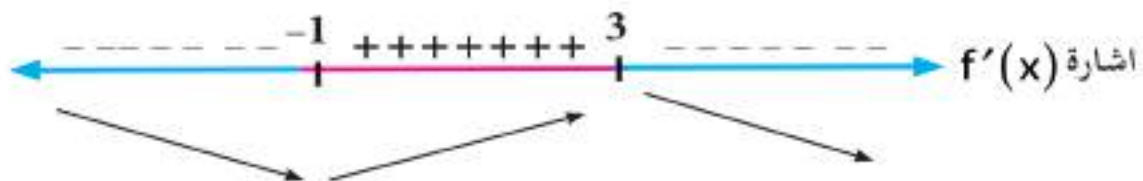
a) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

$0 = 9 + 6x - 3x^2$

$0 = -3(x^2 - 2x - 3)$

$0 = (x-3)(x+1) \Rightarrow x=3, x=-1$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين : $x=3, x=-1$

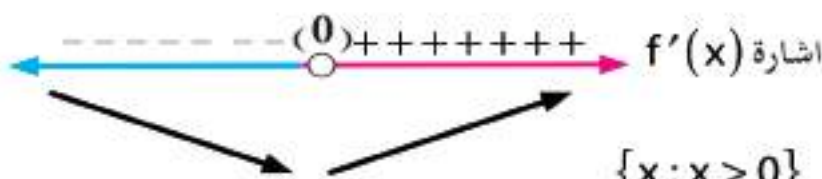
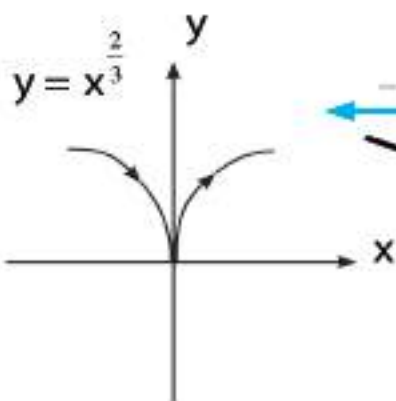


f متناقصة : في $\{x : x < -1\}, \{x : x > 3\}$
 f متزايدة : في الفترة المفتوحة $(-1, 3)$

الحل

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

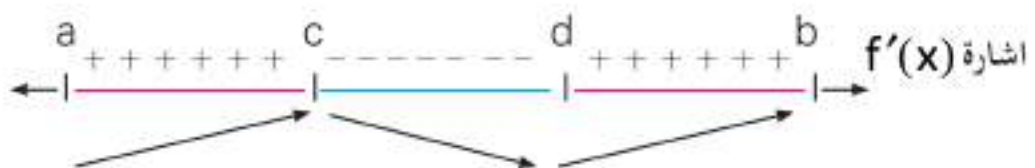
$f'(x)$ غير معرفه اذا كانت $x=0$, اي $x=0$ عدد حرج



f متزايدة في $\{x : x > 0\}$
 f متناقصة في $\{x : x < 0\}$

[3-4] النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية

لاحظ في الشكل أدناه أن الدالة $y = f(x)$ متزايدة على الفترة (a, c) لأن $f'(x) > 0$ ، ومتناقصة على الفترة (c, d) لأن $f'(x) < 0$ ثم تتزايد في الفترة (d, b) .
كما أن $f' = 0$ عند كل من $x = c$, $x = d$
تسمى نقطة $(c, f(c))$ نقطة نهاية عظمى محلية وإن $f(c)$ هي النهاية العظمى المحلية
(Local Maximum) ، وتدعى النقطة $(d, f(d))$ نقطة نهاية صغرى محلية وإن $f(d)$ هي
النهاية الصغرى المحلية (Local Minimum)



تعريف [3-4-1]

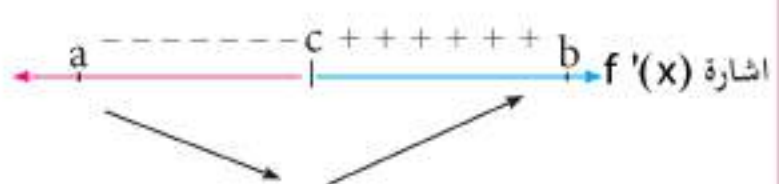
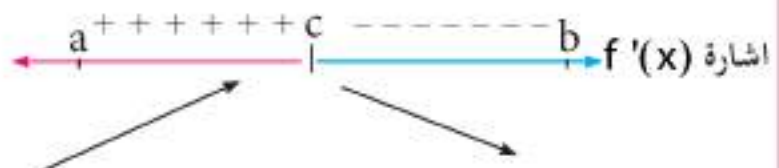
لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق عند $x = c$ التي تنتمي الى الفترة المفتوحة (a, b) فإذا كانت :

$$\begin{aligned} 1) & f'(x) < 0; \forall x \in (c, b) \\ & f'(x) > 0; \forall x \in (a, c) \\ & f'(c) = 0 \end{aligned}$$

فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية

$$\begin{aligned} 2) & f'(x) > 0; \forall x \in (c, b) \\ & f'(x) < 0; \forall x \in (a, c) \\ & f'(c) = 0 \end{aligned}$$

فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية



ملاحظة

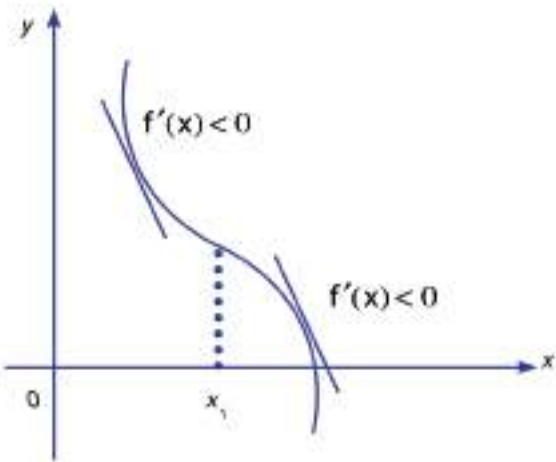
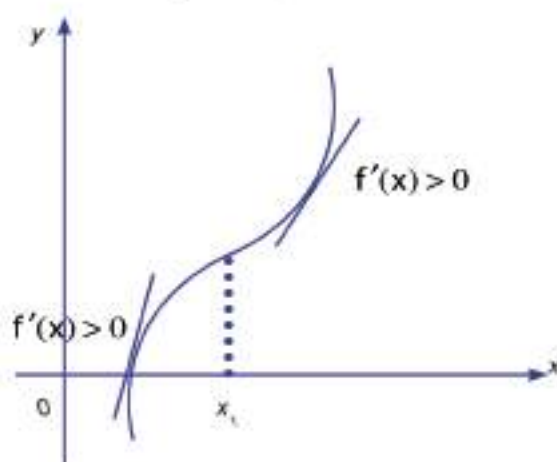
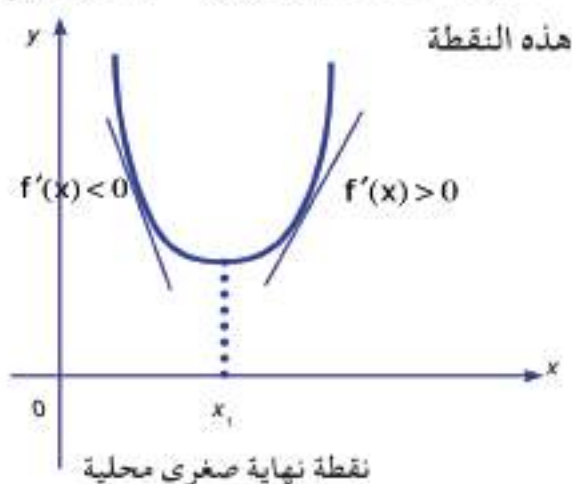
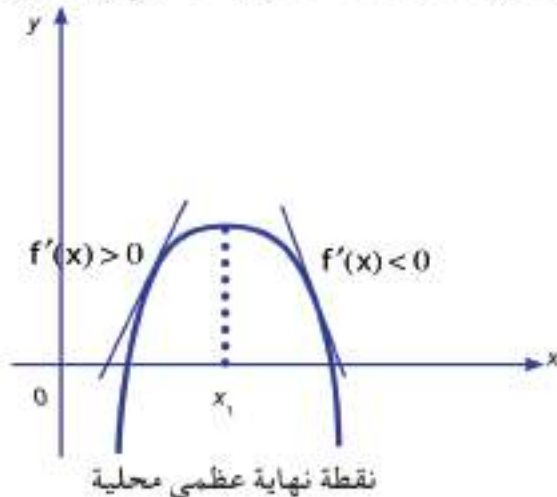
لكي نختبر القيمة العظمى والصغرى المحلية للدالة f بواسطة المشتقة الاولى للدالة f نتبع الخطوات الآتية:

- نجد الاعداد الحرجة وذلك بحل المعادلة $f'(x) = 0$ وليكن $x = x_1$ هو أحد هذه الأعداد الحرجة
- نختبر إشارة $f'(x)$ بجوار $x = x_1$ فإذا كانت إشارة $f'(x)$ موجبة $\forall x < x_1$ وسالبة $\forall x > x_1$

فهذا يعني أن النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة نهاية عظمى محلية
أما إذا كانت إشارة $f'(x)$ سالبة $\forall x < x_1$ وموجبة $\forall x > x_1$

فهذا يعني أن النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة نهاية صغرى محلية

أما إذا كانت إشارة $f'(x)$ لا تغير قبل وبعد x_1 فلا يكون للدالة نقطة نهاية عظمى ولا صغرى عند



لا توجد نهايات

* سنقتصر في بحثنا على الدوال القابلة للاشتقاق.

مثال - 3

جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها اذا علمت أن :

a) $f(x) = 1 + (x - 2)^2$

b) $f(x) = 1 - (x - 2)^2$

c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

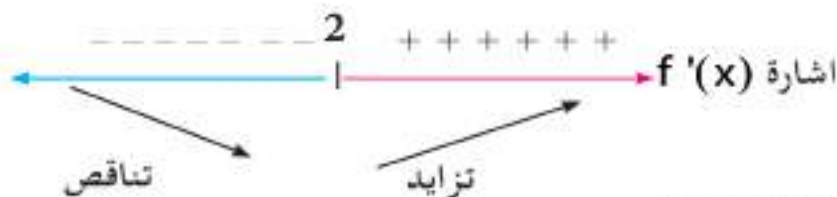
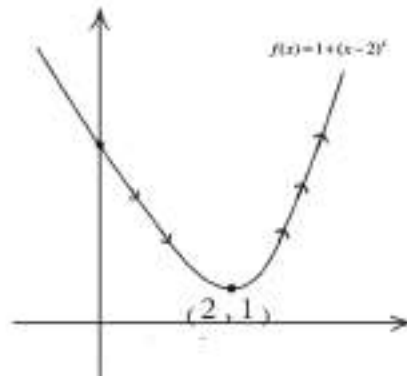
الحل

a) $f(x) = 1 + (x - 2)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2(x - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 1 + (2 - 2)^2 = 1$



f متزايدة في $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في $\{x : x < 2\}$

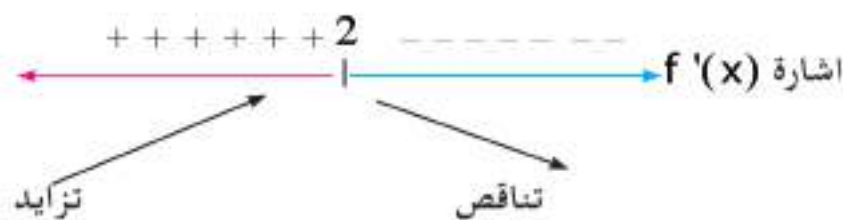
$\therefore$ النقطة $(2, 1) = (2, f(2))$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية .

b) $f(x) = 1 - (x - 2)^2$

$\Rightarrow f'(x) = -2(x - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 1 - (2 - 2)^2 = 1$

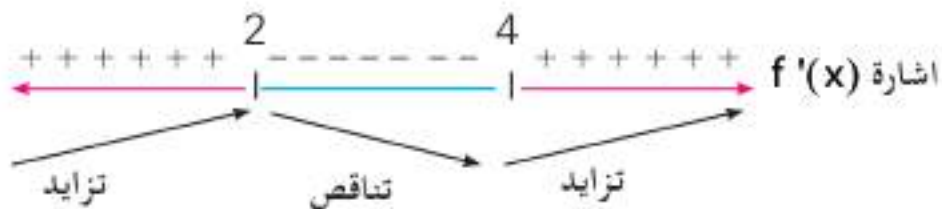


f متزايدة في $\{x : x < 2\}$
 f متناقصة في $\{x : x > 2\}$

∴ النقطة $(2, 1)$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية

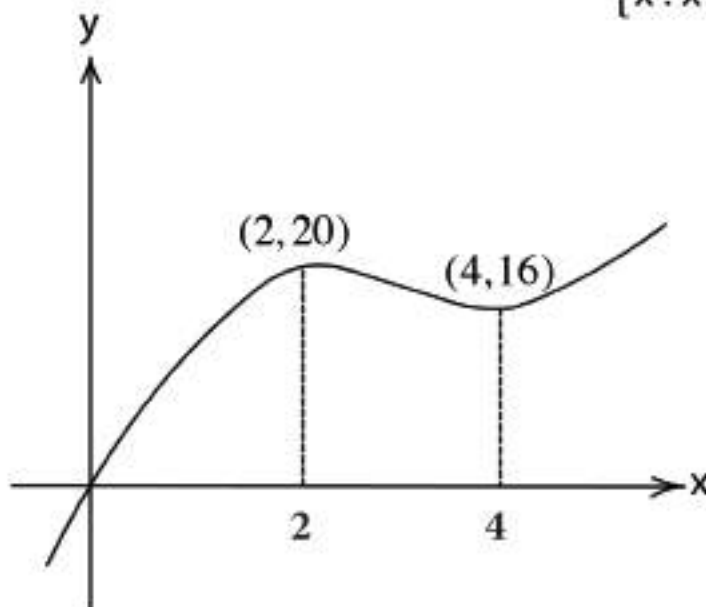
$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x \\ \Rightarrow f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow 3(x^2 - 6x + 8) &= 0 \\ \Rightarrow 3(x - 4)(x - 2) &= 0 \\ \Rightarrow x = 4, \quad x = 2 \\ f(4) &= 16, \quad f(2) = 20 \end{aligned}$$



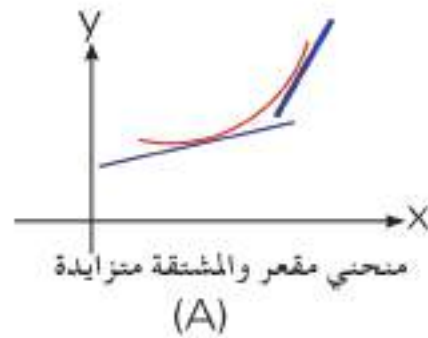
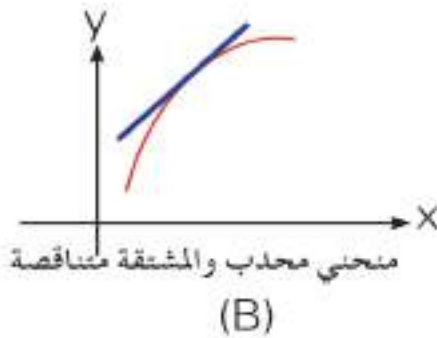
f متزايدة في $\{x : x < 2\}$, $\{x : x > 4\}$

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(2, 4)$



نقطة النهاية العظمى المحلية $(2, 20)$
 نقطة النهاية الصغرى المحلية $(4, 16)$

[3-5] تقعر وتحذب المنحنيات ونقط الانقلاب



تعريف [3-5-1]

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) فيقال عن الدالة f بأنها محدبة إذا كانت f' متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة إذا كانت f' متزايدة خلال تلك الفترة.

ملاحظة

المنحني مقعر في (a, b) (Concave up) $\Leftrightarrow$ المنحني يقع فوق جميع مماساته في (a, b)
والمنحني محدب في (a, b) (Concave down) $\Leftrightarrow$ المنحني يقع تحت جميع مماساته في (a, b) لاحظ الشكلين (A)، (B)

مبرهنة [3-5-2]

إذا كانت f معرفة في $[a, b]$ ولها مشتقة أولى وثانية على (a, b) فإنها تكون مقعرة على (a, b) إذا حققت الشرط الآتي :

$$f''(x) > 0 \text{ لكل } x \in (a, b)$$

تكون محدبة على (a, b) إذا حققت الشرط الآتي :

$$f''(x) < 0 \text{ لكل } x \in (a, b)$$

مثال -1

إدرس تقعر وتحذب كل من الدالتين :

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

الحل

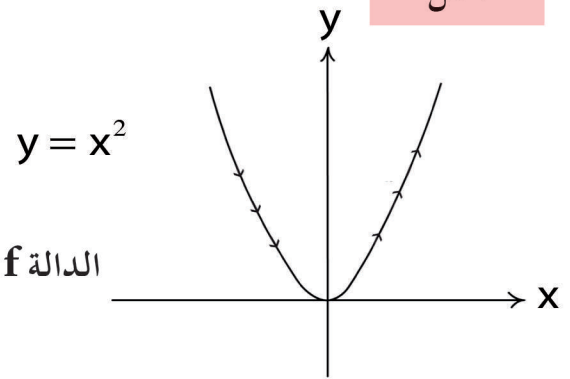
a) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$\therefore f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

الدالة f مقعرة على $\mathbb{R}$



b) $f(x) = x^3$

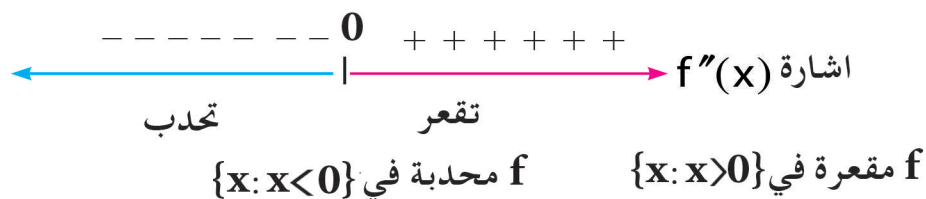
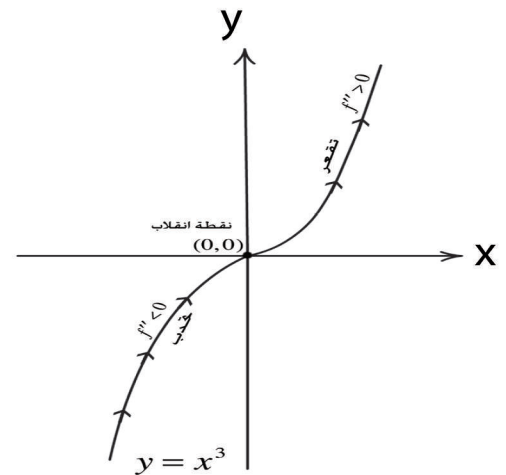
$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0$$

$$\therefore x = 0$$

$$f(0) = 0$$



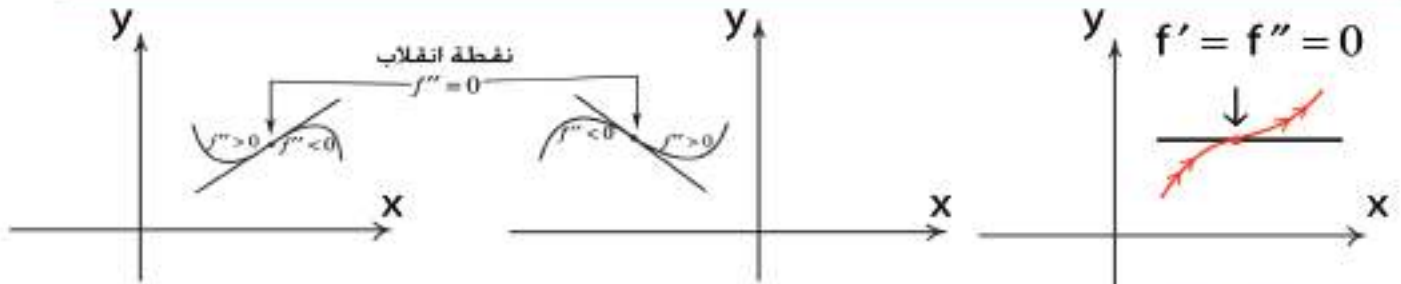
في هذا المثال (b) لاحظ أن المنحني في $\{x: x < 0\}$ محدب وفي $\{x: x > 0\}$ مقعر .

أي قبل النقطة $(0, f(0)) = (0, 0)$ المنحني محدب وبعدها مقعر .

تسمى هذه النقطة نقطة انقلاب (Point of Inflection)

تعريف [3-5-3]

تدعى النقطة التي تنتمي لمنحني دالة والتي يتغير عندها منحني الدالة (من تقعر الى تحدب) أو بالعكس (من تحدب الى تقعر) بنقطة انقلاب لهذا المنحني.



جد نقطة الانقلاب للمنحني: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

مثال - 2

الحل

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(x) = 0$$

$$12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{2}$$



لندرس الآن اشارة $f''(x)$ في جوار $x = \frac{1}{2}$

نلاحظ عن يمين $\frac{1}{2}$ تكون $f''(x)$ موجبة
وعن يسار $\frac{1}{2}$ تكون $f''(x)$ سالبة

∴ النقطة $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ هي نقطة انقلاب.

جد مناطق التحدب والتقعير ونقط الانقلاب إن وجدت للدوال التالية :

a) $f(x) = 4x^3 - x^4$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

c) $h(x) = 4 - (x+2)^4$

d) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

e) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

الحل

a) $f(x) = 4x^3 - x^4$

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

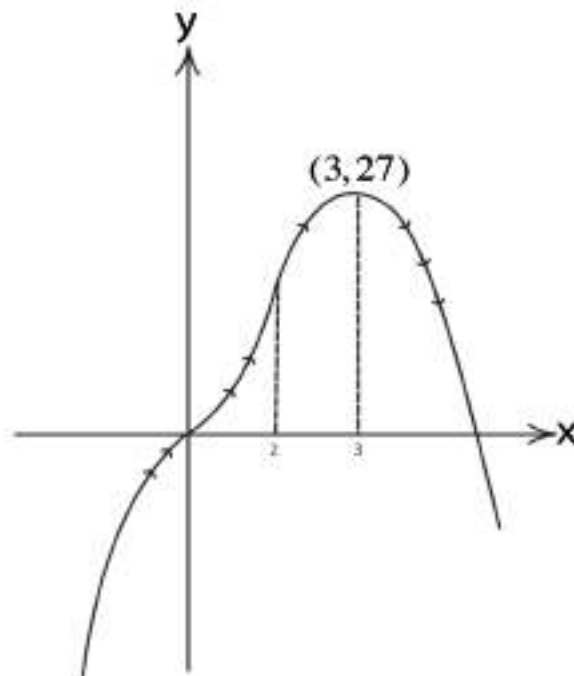
$f''(x) = 0$

$0 = 12x(2 - x) \Rightarrow$

$x = 0, x = 2$

$f(0) = 0, f(2) = 16$

$(0, 0), (2, 16)$



∴ نقطتا الانقلاب هما : $(0, 0), (2, 16)$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ محدبة في } \{x: x < 0\} \text{ و } \{x: x > 2\} \\ f \text{ مقعرة في الفترة المفتوحة } (0, 2) \end{array} \right.$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

الحل

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$f''(0)$ غير معرفة



f محدبة : في $\{x: x < 0\}$

f مقعرة : في $\{x: x > 0\}$

لا توجد نقطة انقلاب لأن 0 لا ينتمي لمجال الدالة.

c) $h(x) = 4 - (x+2)^4$

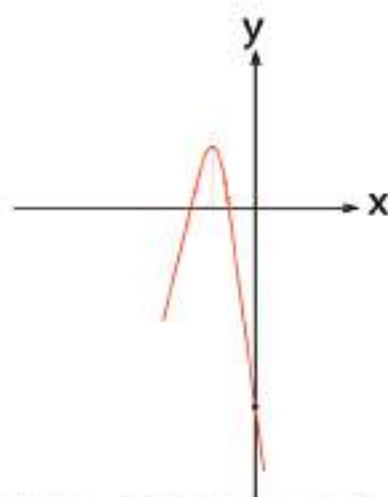
الحل

$$h'(x) = -4(x+2)^3$$

$$h''(x) = -12(x+2)^2$$

$$h''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = -12(x+2)^2 \Rightarrow x = -2$$



يمكن للطالب بالرجوع الى اختبار المشتقة الاولى ليجد ان للدالة نقطة نهاية عظمى محلية عند $(-2, 4)$



الدالة h محدبة في $\{x: x < -2\}$ و $\{x: x > -2\}$

لا توجد نقطة انقلاب عند $x = -2$ لأن الدالة محدبة على جهتيها

$$d) f(x) = 3 - 2x - x^2$$

الحل

$$f'(x) = -2 - 2x$$

$$f''(x) = -2 < 0$$

∴ f الدالة محدبة في R لذا لا توجد نقطة انقلاب .

$$e) f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6 > 0, x \in R \text{ لجميع قيم}$$

الحل

الدالة f مقعرة في R . لذا لا توجد نقطة انقلاب

[3-6] اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية

بدلاً من ملاحظة كيفية تغير إشارة f' عند المرور بالنقطة الحرجة حيث $f'(x) = 0$ فإنه بإمكاننا استخدام الاختبار التالي لنقرر فيما إذا كانت النقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى محلية . وذلك باستخدام اختبار المشتقة الثانية وكما يأتي :

- (1) إذا كان $f'(c) = 0$ وإن $f''(c) < 0$ فإن f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x=c$.
- (2) إذا كان $f'(c) = 0$ وإن $f''(c) > 0$ فإن f تمتلك نهاية صغرى محلية عند $x=c$.
- (3) إذا كانت $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير معرفة فلا يصح هذا الاختبار (ويعاد الاختبار باستخدام المشتقة الأولى) .

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان أمكن، جد النهايات المحلية للدوال الآتية :

$$a) f(x) = 6x - 3x^2 - 1 \quad c) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$b) f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \neq 0 \quad d) f(x) = 4 - (x+1)^4$$

الحل

$$a) f(x) = 6x - 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 6 - 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 6 - 6x \Rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = -6 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0$$

بما أن : $f'(1) = 0$ و $f''(1) < 0$ ، اذاً توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 1$

∴ النهاية العظمى المحلية هي : $f(1) = 6 - 3 - 1 = 2$

$$b) f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 1 + \frac{8}{x^3} \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$$

$$\therefore f''(x) = \frac{-24}{x^4}$$

$$f''(-2) = -\frac{24}{16} < 0$$

بما أن : $f'(-2) = 0$ و $f''(-2) < 0$ $\Leftrightarrow$ توجد نهاية عظمى محلية عند النقطة $x = -2$
 $\therefore$ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-2) = -2 - 1 = -3$

$$c) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 3(x^2 - 2x - 3) \Leftrightarrow 0 = 3(x - 3)(x + 1)$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ أو } x = -1$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$\Rightarrow f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0 \text{ فإن } x = 3 \text{ عندما}$$

$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية هي $f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

$$\Rightarrow f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0 \text{ وعندما } x = -1 \text{ فإن}$$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية هي $f(-1) = 5$

$$d) f(x) = 4 - (x + 1)^4$$

$$f'(x) = -4(x + 1)^3$$

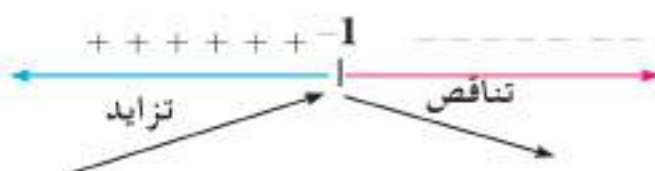
$$f'(x) = 0$$

$$0 = -4(x + 1)^3 \Rightarrow x = -1$$

$$f''(x) = -12(x + 1)^2$$

$$f''(-1) = 0$$

هذه الطريقة لا تصح نعود الى ملاحظة تغير إشارة f' بجوار $x = -1$



إشارة $f'(x)$

وبما أن f متزايدة في $\{x: x < -1\}$

ومتناقصة في $\{x: x > -1\}$

∴ توجد نهاية عظمى محلية هي :

$$f(-1) = 4 - (-1+1)^2 = 4$$

مثال -2

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}, x \neq 0, a \in \mathbb{R} \text{ لتكن}$$

فجد قيمة a علماً أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ ، ثم بين أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

الحل

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$$

$$f''(1) = 2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

∴ لا تمتلك f نهاية عظمى محلية

مثال -3-

عين قيمتي الثابتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ، ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب .

الحل

$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$$

بما أن للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b \Rightarrow 0 = 3 - 2a + b \dots (1)$$

بما أن للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b \Rightarrow 0 = 12 + 4a + b \dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) آنياً نجد أن :

$$a = -\frac{3}{2}, b = -6$$

$$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

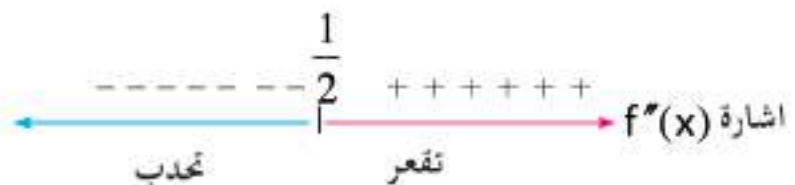
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow 6x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$$



بما أن f مقعرة في $\left\{x : x > \frac{1}{2}\right\}$ ومحدبة في $\left\{x : x < \frac{1}{2}\right\}$

$\therefore$ نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$

إذا كان منحنى الدالة : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

مقعر في $\{x : x < 1\}$ ومحدب في $\{x : x > 1\}$

ويمس المستقيم : $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3, 1)$ فجد قيم الأعداد الحقيقية c, b, a .

الحل

∵ الدالة مستمرة لأنها كثيرة الحدود ، مقعرة في $\{x : x < 1\}$ ومحدبة في $\{x : x > 1\}$ فهي تمتلك

نقطة انقلاب عند $x = 1$

$$\therefore f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \div 2$$

$$3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \quad \dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -9 \text{ ميل المماس } y + 9x = 28 \text{ هو}$$

$$f'(3) \text{ هو ميل المماس لمنحنى الدالة } f \text{ عند } x = 3$$

$$f'(3) = 27a + 6b$$

$$-9 = 27a + 6b \quad \div 3$$

$$\Rightarrow -3 = 9a + 2b \quad \dots(2)$$

$$\text{النقطة } (3, 1) \text{ تحقق معادلة منحنى الدالة } y = f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$$\therefore 1 = 27a + 9b + c \quad \dots (3)$$

وبالتعويض من (1) في (2) ينتج :

$$-3 = 9a + 2(-3a) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -3(-1) = 3$$

وبالتعويض في المعادلة (3) ينتج :

$$1 = -27 + 27 + c \Rightarrow c = 1$$

إذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ، ونقطة

مثال -5-

انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a, c \in \mathbb{R}$.

الحل

عند $x = 1$ توجد نقطة انقلاب

$$f''(1) = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6ax + 6 \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$\therefore 0 = 6a + 6 \Rightarrow a = -1$$

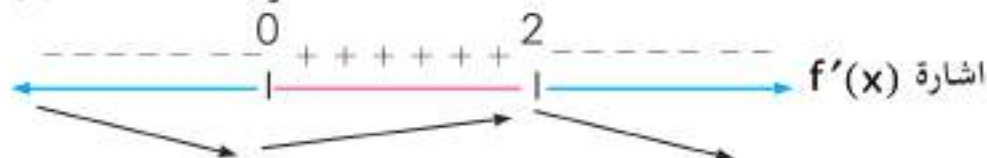
$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$$

$$-3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \quad \text{حرجتان}$$



$\therefore f$ تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

$\therefore$ النقطة $(2, 8)$ نهاية عظمى محلية و تحقق معادلة منحنى الدالة :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$$

$$\therefore 8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 4$$

تمارين

1. لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $a \in \{-4, 8\}, b \in \mathbb{R}$ جد قيمة a اذا كانت :
(أ) الدالة f محدبة (ب) الدالة f مقعرة .
2. اذا كانت $(2, 6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فجد قيمة $a, b \in \mathbb{R}$ وبين نوع النقطة الحرجة .
3. اذا كان $g(x) = 1 - 12x, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكان كل من g, f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1, -11)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة $c \in \mathbb{R}$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه .
5. اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in \mathbb{R}$.
6. لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq 0$ برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية.
7. المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2, -1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in \mathbb{R}$ وما نوع النهاية .

[3-7] رسم المخطط البياني للدالة Graphing Function

ولكي نرسم المخطط البياني لدالة معطاة نتبع الخطوات الآتية :

1 (نحدد أوسع مجال للدالة :

فإذا كانت الدالة حدودية (Polynomial) فإن أوسع مجال لها هو R
 أما إذا كانت دالة نسبية $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ فإن أوسع مجال لها هو $\{x \in R : h(x) \neq 0\}$

2 (نبين نوع التناظر للمنحني هل هو مع محور الصادات أم مع نقطة الاصل ؟

(i) $f : A \rightarrow B$ متناظر حول محور الصادات $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A \exists (-x) \in A \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

(ii) $f : A \rightarrow B$ متناظر حول نقطة الاصل $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A \exists (-x) \in A \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

3 (نبين إن كان منحني الدالة يقطع المحورين أم لا ؟

اي نجعل $x=0$ ونجد قيمة y (ان امكن) فجد بذلك نقط التقاطع مع محور الصادات .

ونجعل $y=0$ ونجد قيمة أو قيم x (ان امكن) فجد بذلك نقط التقاطع مع محور السينات

4 (نجد المستقيمات المخاذية الأفقية والعمودية في الدوال النسبية إن وجدت :

(i) فإذا كانت $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ نجعل $h(x) = 0$ ونجد قيم x

ولتكن $x=a$ فهي تمثل معادلة المستقيم المخاذي العمودي (Vertical Asymptote)

(ii) وإذا كانت $x = \frac{n(y)}{m(y)}$ نجعل $m(y) = 0$ ونجد قيمة y (ان امكن) ولتكن $y=b$ فهي تمثل المخاذي الافقي

(Horizontal Asymptote)

5 (نجد $f'(x)$, $f''(x)$ ونهما نجد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ومناطق التقعر

والتحدب ونقط الانقلاب إن وجدت .

6 (نجد نقط اضافية إن احتجنا الى ذلك ثم نرسم منحني الدالة .

ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحنى الدالة : $f(x) = x^5$

الحل

(1) اوسع مجال R

(2) نقطة التقاطع مع المحورين الإحداثيين. $(0,0)$

(3) المنحنى متناظر حول نقطة الاصل لأن :

$$\forall x \in R, \exists (-x) \in R \Rightarrow f(-x) = (-x)^5 \\ = -x^5$$

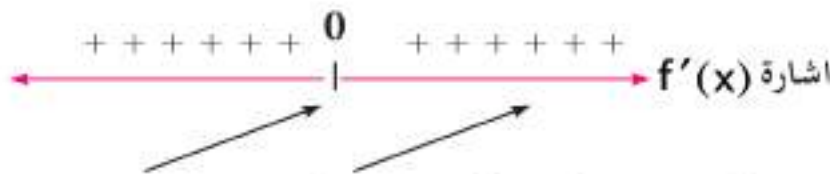
$$f(-x) = -f(x)$$

(4) المحاذيات : لا توجد لأن الدالة ليست نسبية.

$$f'(x) = 5x^4$$

(5)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$



f متزايدة في كل من $\{x : x < 0\}$, $\{x : x > 0\}$

$(0,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

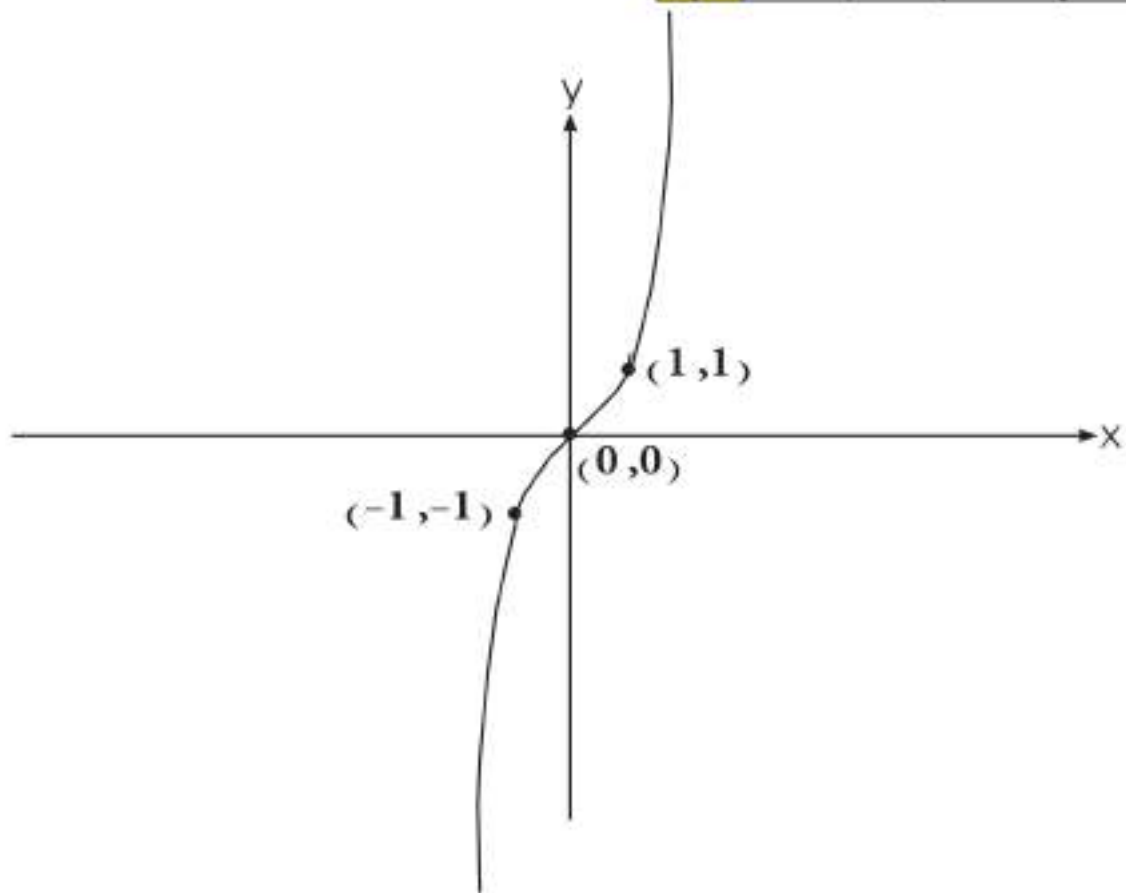


f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

$\therefore (0,0)$ نقطة الانقلاب

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	32	-32



مثال - 2 ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحنى الدالة : $y = x^3 - 3x^2 + 4$

الحل

1 (اوسع مجال R)

$$x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4)$$

2 (التقاطع مع محور الصادات)

3 (التناظر)

$$\forall x \in R, \exists (-x) \in R \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4$$

$$= -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$$

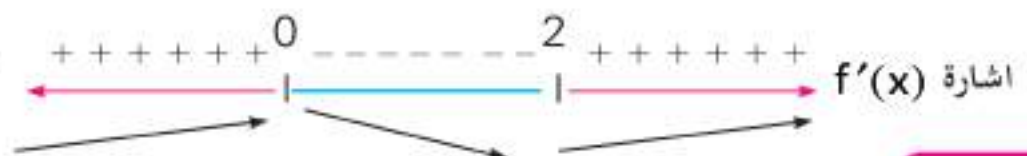
لا يوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل لأن $f(-x) \neq -f(x)$, $f(x) \neq f(-x)$
4 (المحاذيات لا توجد لأن الدالة ليست نسبية .

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x=0 , x=2$$

$$f(0) = 4 \Rightarrow (0,4)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow (2,0)$$



f متزايدة في كل من $\{x : x < 0\}$, $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في الفترة $(0, 2)$

$\therefore (0, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(2, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1, 2)$$



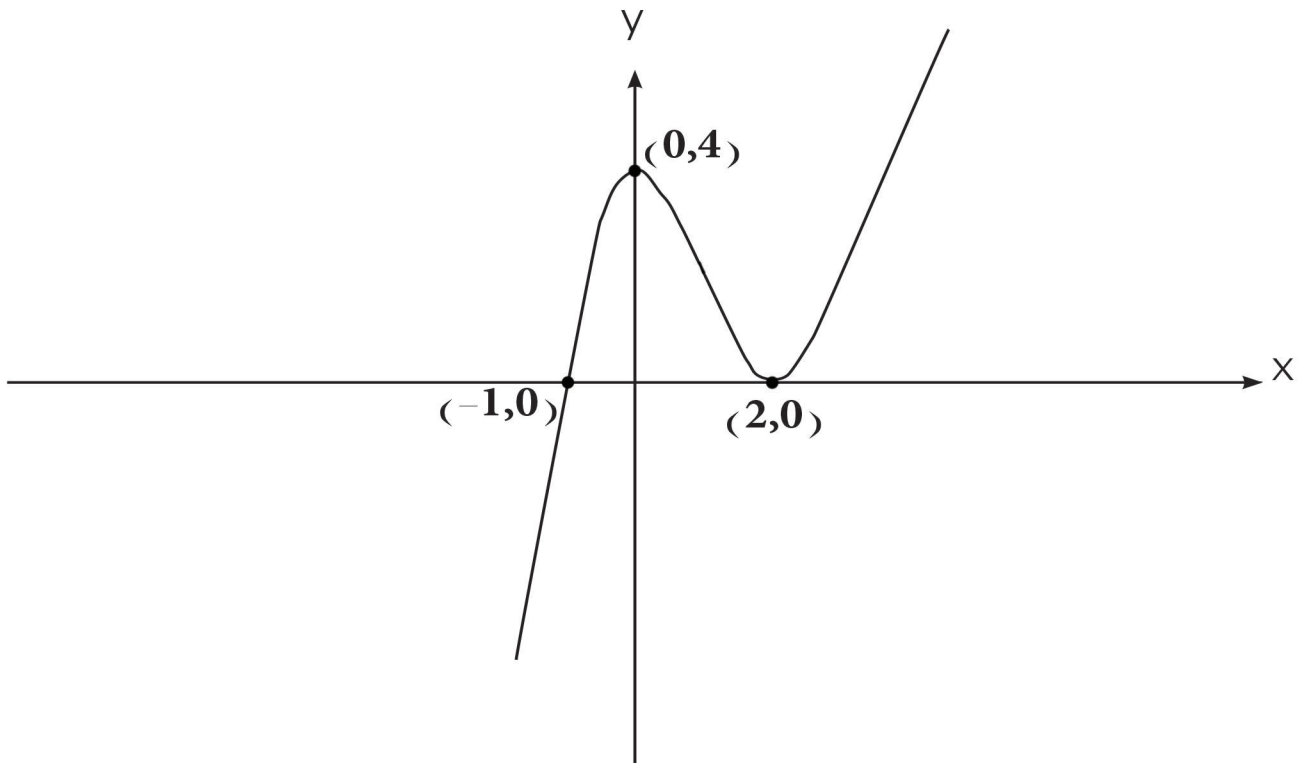
f مقعرة في $\{x : x > 1\}$

f محدبة في $\{x : x < 1\}$

$\therefore (1, 2)$ نقطة انقلاب .

6) الجدول

x	0	1	2	3	-1
y	4	2	0	4	0



مثال -3-

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة :

الحل

$$(1) \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{اوسع مجال للدالة :}$$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R - \{-1\}$

(2) بما أن 1 ينتمي الى مجال الدالة لكن (-1) لا ينتمي الى مجال الدالة لذلك فالمنحنى غير متناظر مع محور الصادات وغير متناظر مع نقطة الاصل.

(3) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين:

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1),$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3}, 0) \quad \text{هما نقطتا التقاطع مع المحورين}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

(4) المستقيم المماسي الشاقولي

$$f(x) = y = \frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow$$

$$yx + y = 3x - 1 \Rightarrow yx - 3x = -1 - y$$

$$x(y-3) = -1-y \Rightarrow x = \frac{-1-y}{y-3}$$

المستقيم المماسي الافقي $y-3=0 \Rightarrow y=3$

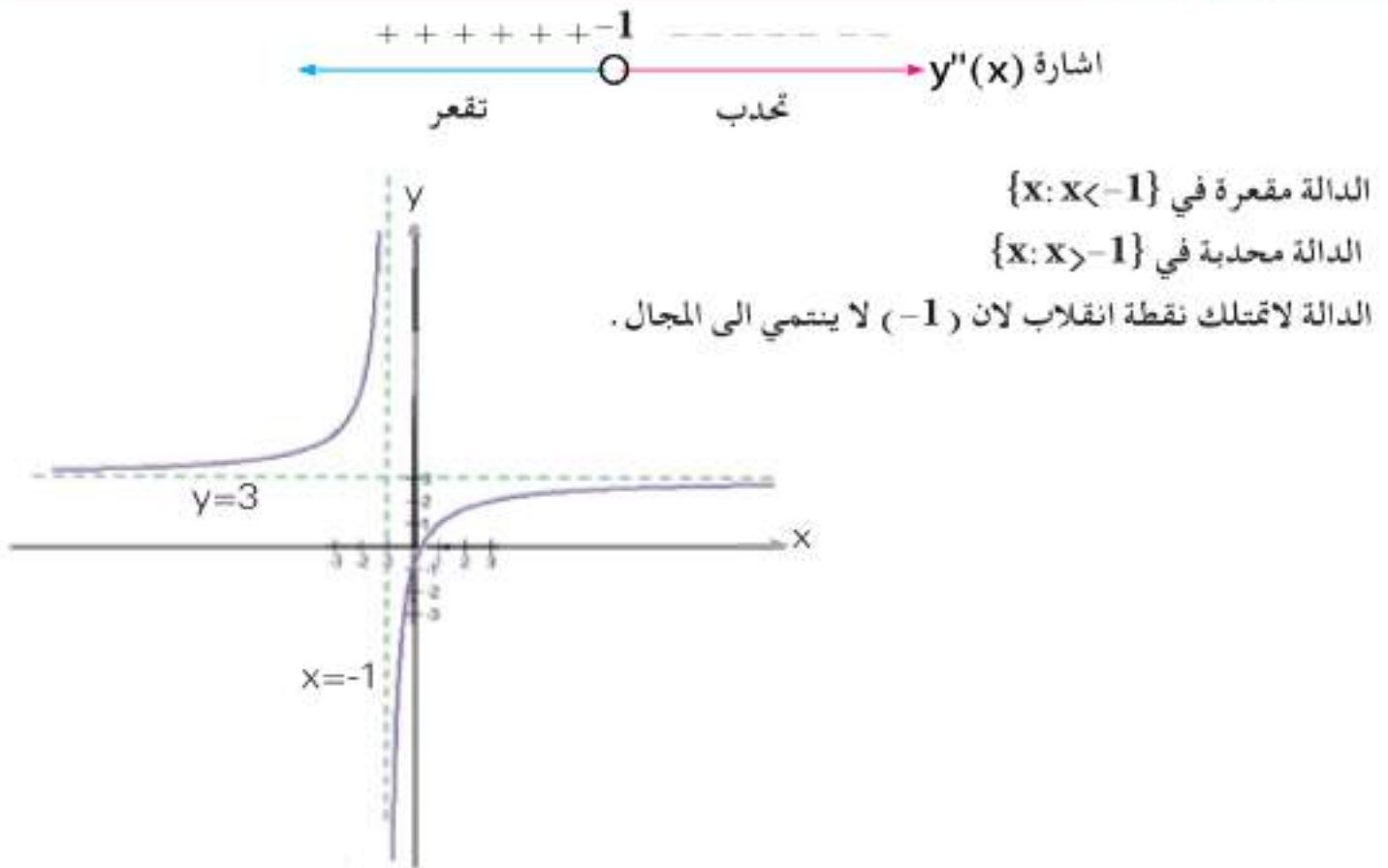
$$f'(x) = \frac{(x+1)(3) - (3x-1)(1)}{(x+1)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$\forall x \in R - \{-1\} : f'(x) > 0$$

الدالة متزايدة في $\{x : x < -1\}$, $\{x : x > -1\}$ ولا توجد نقاط حرجة.

$$f'(x) = 4(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x) = -8(x+1)^{-3}(1) = \frac{-8}{(x+1)^3}$$



باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني :

مثال - 4

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

الحل

1) اوسع مجال للدالة $R =$

2) نقاط التقاطع مع المحورين : عندما $x=0$ فإن $y=0$ وبالعكس.

∴ نقطة التقاطع مع المحورين .

3) التناظر :

$$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات

لذلك لا يوجد محاذي عمودي

$$x^2 + 1 \neq 0$$

$$f(x) = y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 + y = x^2$$

$$x^2(y - 1) = -y \Rightarrow x^2 = \frac{-y}{y - 1}$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

∴ المستقيم المحاذي الأفقي

5)

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$



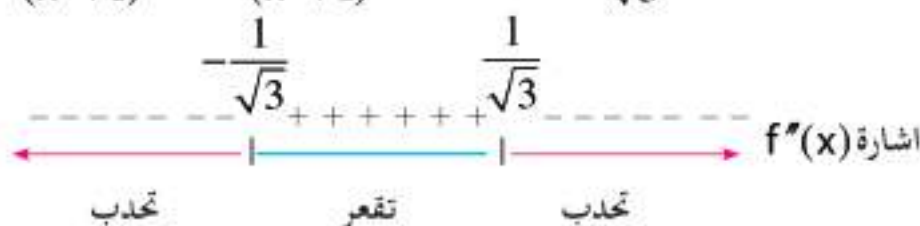
$f(x)$ متزايدة في $\{x : x > 0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x : x < 0\}$

$(0, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

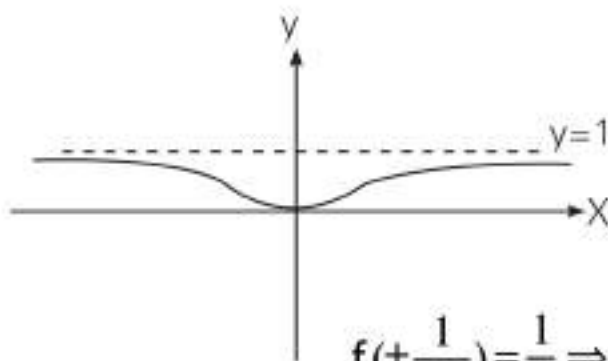
$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(2) - 2x(2)(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$f(x)$ محدبة في $\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في الفترة المفتوحة $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$



$$f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$$

نقطتنا الانقلاب هما :

تمارين

أرسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

3) $f(x) = (1 - x)^3 + 1$

4) $f(x) = 6x - x^3$

5) $f(x) = \frac{1}{x}$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

7) $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

8) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

9) $f(x) = 2x^2 - x^4$

10) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

[3-8] تطبيقات عملية على القيم العظمى او الصغرى.

ظهرت في القرن السابع عشر الكثير من الاسئلة دفعت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن امثلة ذلك المسائل التي وردت في بحوث الفيزياء مثل اقصى ارتفاع تصله قذيفة اطلقت بزوايا مختلفة ، او اقصى ارتفاع يصله جسم مقذوف شاقولياً الى اعلى او اقل زمن وأقل كلفة ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط ، ... الخ .
ولحل هذه المسائل نتبع الخطوات الآتية :

1. نرسم مخططاً للمسألة (إن امكن) ونعين عليه الأجزاء المهمة في المسألة .
2. نكوّن الدالة المراد ايجاد قيمتها العظمى او الصغرى ونحدد مجالها على ان تكون في متغير واحد .
3. اذا كان المجال فترة مغلقة نجد الاعداد الحرجة وقيم الدالة في اطراف الفترة وفي الاعداد الحرجة .
فأيها اكبر هي القيمة العظمى وأيها أصغر هي القيمة الصغرى .

مثال - I -

جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن .

الحل

ليكن العدد x

∴ مربع العدد x^2

ولتكن $f(x) = x + x^2$

$$f'(x) = 1 + 2x, f''(x) = 2 > 0$$

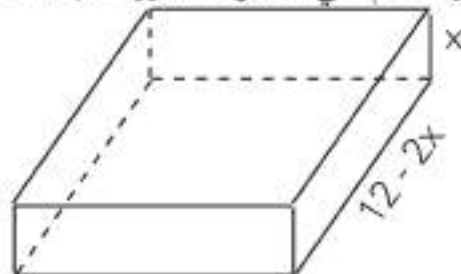
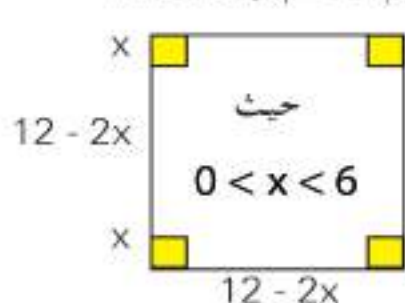
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0$$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = -\frac{1}{2}$

∴ العدد هو $(-\frac{1}{2})$.

صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص أربعة مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها . ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة ؟



الحل

نفرض طول ضلع المربع المقطوع يساوي x cm

∴ أبعاد الصندوق هي : x ; $12 - 2x$; $12 - 2x$

الحجم = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة :

$$v = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = f(x) = x(144 - 48x + 4x^2)$$

$$V = f(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = f'(x) = 144 - 96x + 12x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = 12(12 - 8x + x^2) \Rightarrow 12(6 - x)(2 - x) = 0$$

$$x = 2 , \quad x = 6 \quad \text{النقط الحرجة}$$

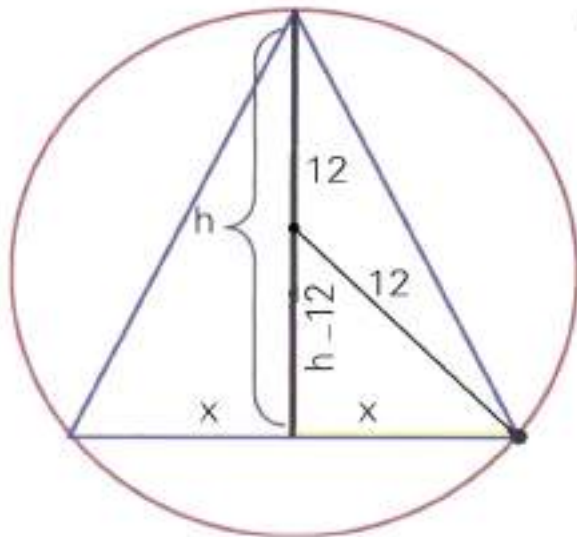
لاحظ من الشكل أن 6 يهمل لأنه غير معقول

$$v = f(2) = 2(12 - 4)^2 = 128 \text{ cm}^3 \quad \text{عند 2 توجد نهاية عظمى للحجم وتساوي}$$

جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm

ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

الحل



نفرض بعدي المثلث : h , $b = 2x$ قاعدة المثلث (المتغيرات)

لنجد علاقة بين المتغيرات :

$$x^2 + (h-12)^2 = 144 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس :}$$

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 = 24h - h^2$$

$$x = \sqrt{24h - h^2}$$

الدالة : (مساحة المثلث)

$$A = \frac{1}{2} (b)(h)$$

$$A = \frac{1}{2} (2x)(h) = hx$$

$$A = f(h) = h\sqrt{24h - h^2}$$

التعويض :

لاحظ المجال : $0 \leq h \leq 24$ وهذا يعني أن h موجبة فيمكن توحيد الجذر

$$A = f(h) = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$$

$$A = f(h) = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

$$\frac{dA}{dh} = f'(h) = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

المشتقة

نجد النقطة الحرجة لدالة المساحة

$$f'(h) = 0 \Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0$$

وعندما

$$4h^2(18 - h) = 0 \Rightarrow h = 18\text{cm}$$

∴ الارتفاع $h=18\text{ cm}$

$$x = \sqrt{24h - h^2} \Rightarrow x = \sqrt{24(18) - 18^2}$$

$$x = \sqrt{18(24 - 18)} = \sqrt{18(6)} = 6\sqrt{3}\text{cm}$$

طول القاعدة $b = 2x = 12\sqrt{3}\text{cm}$

$$A_1 = \pi r^2 \Rightarrow A_1 = \pi(12)^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

مس الدائرة :

$$A_2 = \frac{1}{2}bh \Rightarrow A_2 = 6\sqrt{3}(18) = 108\sqrt{3}\text{cm}^2$$

مس المثلث :

$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

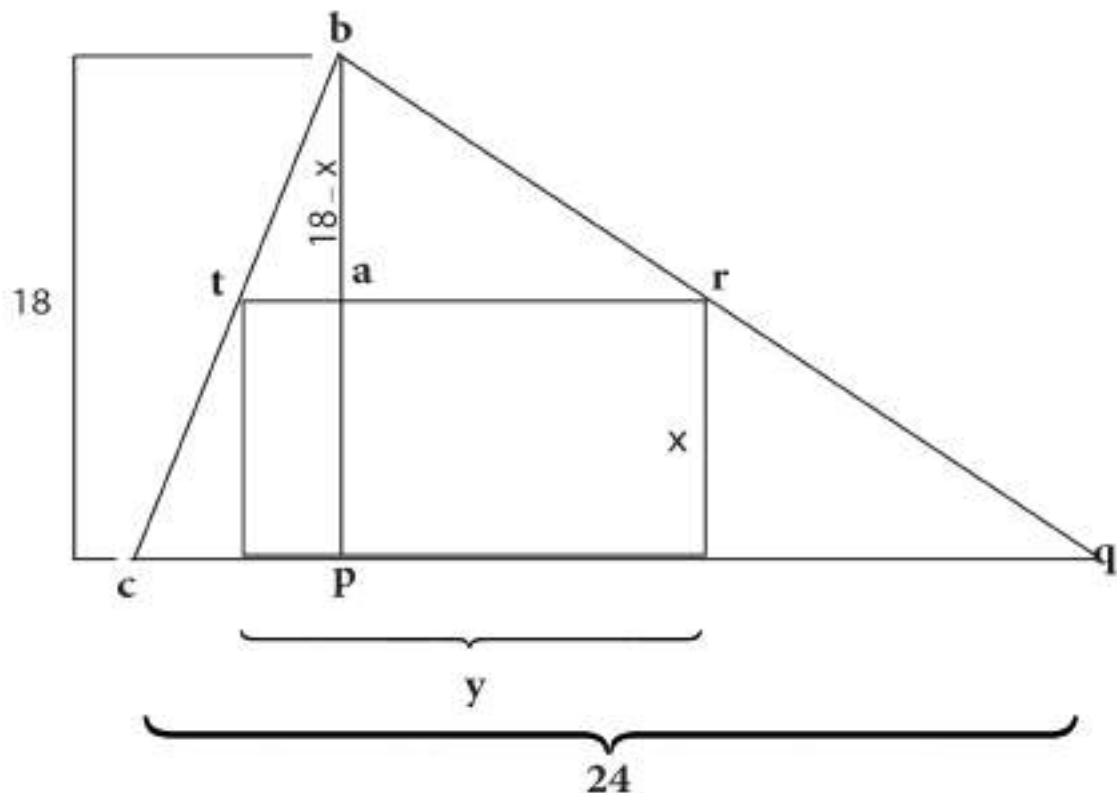
جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه

مثال - 4

18cm بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

الحل

- نفرض طول كل من بعدي المستطيل : $x, y \text{ cm}$



العلاقة بين المتغيرات : المثلثان btr , bcq متشابهان لتساوي زواياهما المتناظرة لذا تناسب أضلاعهما المتناظرة وكذلك ارتفاعاهما .

$$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bp} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18-x}{18}$$

$$\Rightarrow y = \frac{24}{18}(18-x) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18-x)$$

$$A = xy \Leftarrow$$

الدالة : مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه

$$A = x \frac{4}{3}(18-x)$$

التحويل بدلالة متغير واحد :

$$f(x) = A = \frac{4}{3}(18x - x^2)$$

التبسيط قبل المشتقة :

$$f'(x) = \frac{4}{3}(18-2x)$$

نجد النقط الحرجة :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 9$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}(-2) = -\frac{8}{3}$$

$$f''(9) = -\frac{8}{3} < 0$$

وهذا يعني لدالة المساحة نهاية عظمى محلية عند $x = 9 \text{ cm}$ ويمثل أحد البعدين .

$$y = \frac{4}{3}(18 - x) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18 - 9) = 12 \text{ cm}$$

البعد الآخر

مثال - 5

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60 cm أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

الحل

الفرضية : نفرض نصف قطر الدائرة $r \text{ cm}$ ونفرض طول ضلع المربع $x \text{ cm}$

العلاقة : محيط المربع + محيط الدائرة = 60 cm

$$\therefore 60 = 4x + 2\pi r \Rightarrow$$

$$r = \frac{1}{\pi}(30 - 2x)$$

الدالة هي : مساحة الدائرة + مساحة المربع

$$A = x^2 + \pi \left[\frac{1}{\pi}(30 - 2x) \right]^2$$

التحويل لمتغير واحد :

$$A = f(x) = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$$

نشتق :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0 = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$$

وعندما

$$0 = \pi x + 4x - 60 \Rightarrow 60 = \pi x + 4x$$

$$x(\pi + 4) = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{\pi + 4} \text{ cm}$$

$$\therefore r = \frac{1}{\pi} \left(30 - \frac{120}{\pi + 4} \right) \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4} \text{ cm} \Rightarrow x = 2r$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{\pi}(8) > 0 \quad \text{الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية} \quad (\text{و. ه. م.})$$

مثال - 6-

جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن

لنقطة (0,4)

الحل

نفرض أن النقطة $p(x, y)$ هي من نقط المنحني $y^2 - x^2 = 3$ فتحقق معادلته .

$$\therefore x^2 = y^2 - 3 \quad \dots (1)$$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

$$\therefore s = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \quad \dots (2)$$

بالتعويض من المعادلة 1 في 2 ينتج :

$$s = f(y) = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$f'(y) = \frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}}$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\therefore x^2 = y^2 - 3$$

$$\therefore x^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow (1, 2), (-1, 2)$$

تمارين

1. جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.
2. جد ارتفاع أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}\text{cm}$.
3. جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}\text{cm}$.
4. جد أكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\text{cm}$.
5. جد أقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته 16 cm^2 .
6. جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm .
7. جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $(6,8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول أصغر مثلث.
8. جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ثم جد محيطه.
9. جد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm .
10. جد أكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\text{ cm}$ دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين.
11. علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi)\text{ cm}^3$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها أقل ما يمكن.
12. خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته 108 m^2 جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علماً أن الخزان ذو غطاء كامل.