

الفصل الرابع

Chapter Four

Integration التكامل

المناطق المحددة بمنحنيات

[4-1]

المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

[4-2]

تعريف التكامل.

[4-3]

النظرية الأساسية للتكامل - الدالة المقابلة.

[4-4]

خواص التكامل المحدد.

[4-5]

التكامل غير المحدد.

[4-6]

اللوغاريتم الطبيعي.

[4-7]

إيجاد مساحة منطقة مستوية.

[4-8]

الحجوم الدوانية.

[4-9]

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
فترة الفترة $[x_0, x_n]$	$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$
المجموع الاسفل	$L(\sigma, f)$
المجموع الاعلى	$U(\sigma, f)$
المجموع	Σ
سيكما	σ

[4-1] المناطق المحددة بمنحنيات .

Regions Bounded by Curves.

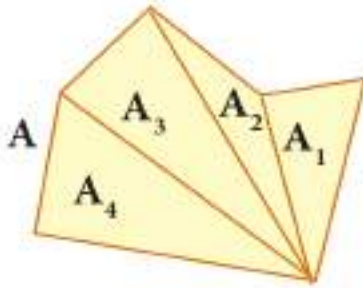
تعرفت من دراستك السابقة على مناطق مستوية مختلفة مثل الذي تراه في الشكل (4-1) :



الشكل (4-1)

حيث A_1 منطقة مستطيلة و A_2 منطقة مثلثة و A_3 منطقة شبه منحرف و A_4 منطقة دائرية ولا شك أنك تعرف إيجاد مساحات هذه المناطق .

أما المنطقة A كما في الشكل (4-2) والتي تسمى منطقة مضلعة فيمكنك حساب مساحتها بتقسيمها الى مناطق مثلثة .

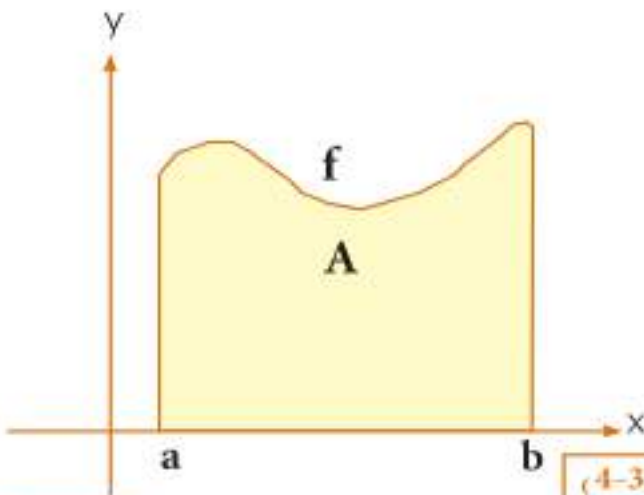


$$A_1, A_2, A_3, A_4$$

وتكون مساحتها تساوي مساحة A_1 + مساحة A_2 + مساحة A_3 + مساحة A_4

الشكل (4-2)

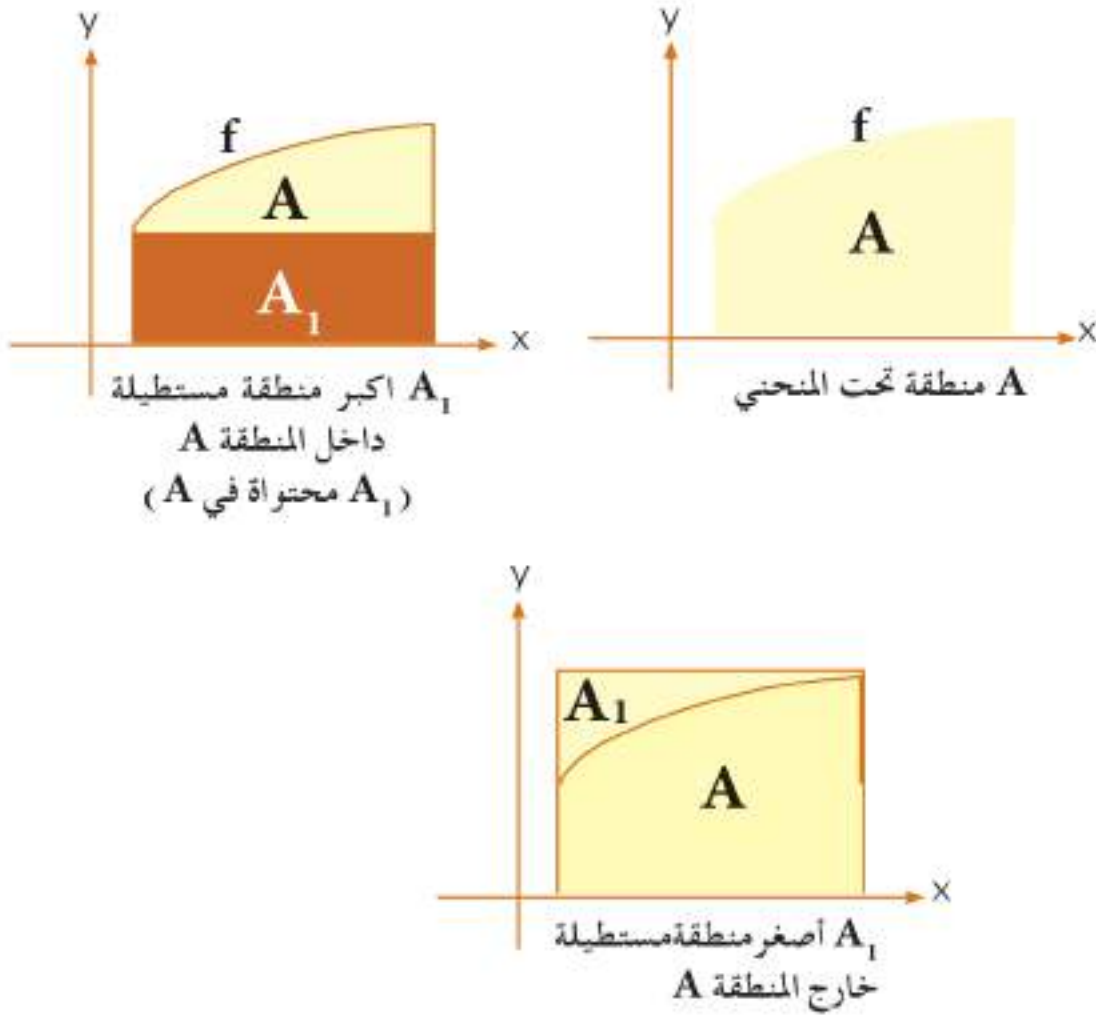
وبالطريقة نفسها يمكننا إيجاد مساحة أي منطقة مضلعة بعد أن نقسمها الى مناطق مثلثة أو مربعة أو مستطيلة ،



الشكل (4-3)

أما المنطقة A في الشكل (4-3) والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها الى مناطق معلومة لديك مثل (مثلث، مربع، مستطيل، دائرة، ...) فكيف يمكنك حساب مساحتها ؟

تسميات:



الشكل (4-4)

1. مساحة أي منطقة مستوية هي عدد حقيقي غير سالب .
2. إذا كانت $A' \subseteq A$ فإن مساحة المنطقة $A' \leq$ مساحة المنطقة A .

ملاحظة

لاحظ الشكل (4-5)



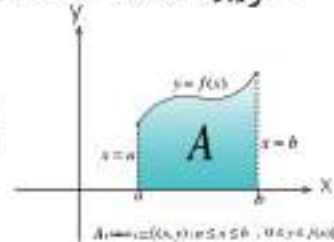
الشكل (4-5)

[4-1-1] إيجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة مستوية :

مثال -1-

في الشكل (4-6) ، A هي المنطقة تحت منحنى الدالة المستمرة f ، أوجد قيمة تقريبية لمساحة هذه المنطقة حيث :

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5, y \leq \sqrt{x-1}\} \text{ (المنطقة)}$$



الحل

نحدد داخل المنطقة A أكبر منطقة مستطيلة $(abcd)$ بحيث تكون قاعدتها من $x=2$ إلى $x=5$

ولتكن $A_1 \subseteq A$ حيث $A_1 \subseteq A$ وعليه تكون مساحة هذه المنطقة $A_1 = ab \times ad = (5-2) \times 1 = 3 \text{ unit}^2$ كذلك نحدد خارج المنطقة أصغر منطقة مستطيلة $(abc'd')$ ولتكن A'_1 حيث

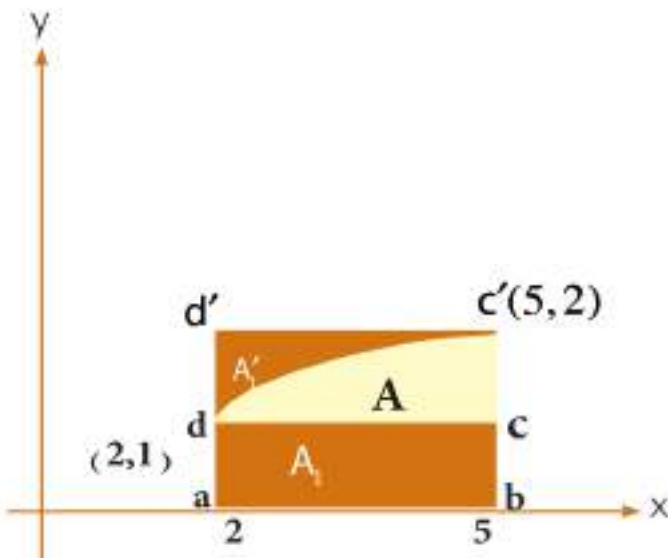
$A \subseteq A'_1$ بحيث تكون قاعدتها من $x=2$ إلى $x=5$ فتكون مساحة A'_1 تساوي : $A'_1 = ab \times ad' = (5-2) \times 2 = 6 \text{ unit}^2$

بما أن $A_1 \subseteq A \subseteq A'_1$

∴ مساحة $A_1 \geq$ مساحة $A \geq$ مساحة A'_1

$3 \leq$ مساحة المنطقة $A \leq 6$

فتكون القيمة التقريبية الاولى لمساحة المنطقة A تساوي $\frac{3+6}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ unit}^2$



الشكل (4-6)

ملاحظة

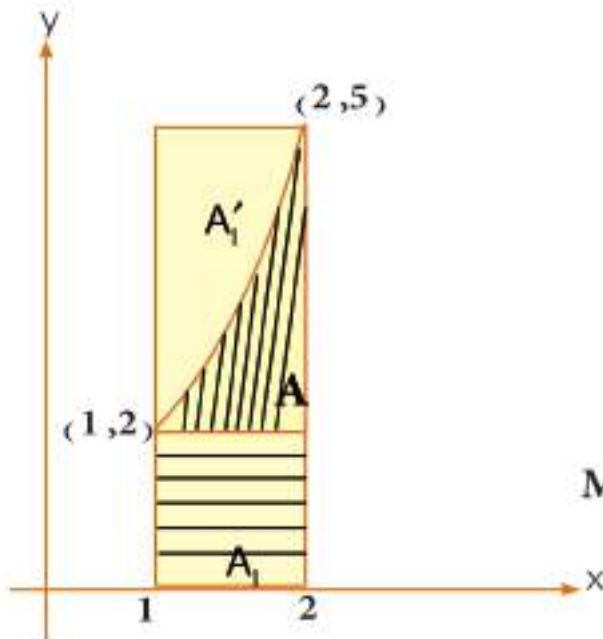
لاحظ في المثال 1 ان A_1 هي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها (ad) يساوي اصغر قيمة للدالة في $[2, 5]$ وسنرمز لها بالرمز (m) اما A'_1 فهي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها ad' يساوي اكبر قيمة للدالة في $[2, 5]$ وسنرمز لها (M) وكما تعرفت في فصل التفاضل فان (m) (اصغر قيمة للدالة المستمرة على $[a, b]$) وكذلك (M) (اكبر قيمة للدالة المستمرة على $[a, b]$) نبحث عنهما عند احد طرفي الفترة $[a, b]$ أو عند النقطة الحرجة ان وجدت .

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, y = x^2 + 1\}$$

مثال - 2

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A .

الحل



الشكل (4-7)

A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل A (محتواة في A)

قاعدتها من $x=1$ الى $x=2$ وارتفاعها $m = 2$

$$A_1 = 2(2-1) = 2 \text{ unit}^2 \text{ هي}$$

A'_1 اصغر منطقة مستطيلة خارج A (تحتوي A)

قاعدتها ايضاً من $x=1$ الى $x=2$ وارتفاعها $M = 5$

$$A'_1 = 5(2-1) = 5 \text{ unit}^2$$

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A'_1$

∴ مساحة المنطقة $A_1 \leq$ مساحة منطقة A $\leq$ مساحة منطقة A'_1

$$\therefore 2 \leq \text{مساحة } A \leq 5$$

فتكون القيمة التقريبية لمساحة A تساوي $\frac{A_1 + A'_1}{2} = \frac{2+5}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ unit}^2$

[4-1-2] مساحة منطقة مستوية بدقة أكبر:

تمهيد: لنفرض ان مع مهند 19000 ديناراً وأراد حسام ان يعرف هذا المبلغ فكان الحوار الاتي بينهما:
 حسام: كم معك من الدنانير؟

مهند: قدّر المبلغ بنفسك علماً بأنه بين عشرة آلاف وعشرين ألفاً.

حسام: أتوقع ان يكون معك 15000 ديناراً أي $\frac{20000+10000}{2} = 15000$

مهند: اقتربت قليلاً ولكن ألمح لك اكثر فالمبلغ الذي معي بين 15000 ، 20000 دينار.

حسام: اذاً في حدود 17500 دينار اي $\frac{20000+15000}{2} = 17500$

مهند: هذه القيمة اكثر دقة من القيمة الاولى لان القيمة الصحيحة 19000 دينار .

من هذا المثال نستنتج الآتي :

في المحاولة الاولى : $10000 > \text{المبلغ} > 20000$ وكان الخطأ في القيمة التقريبية الاولى :

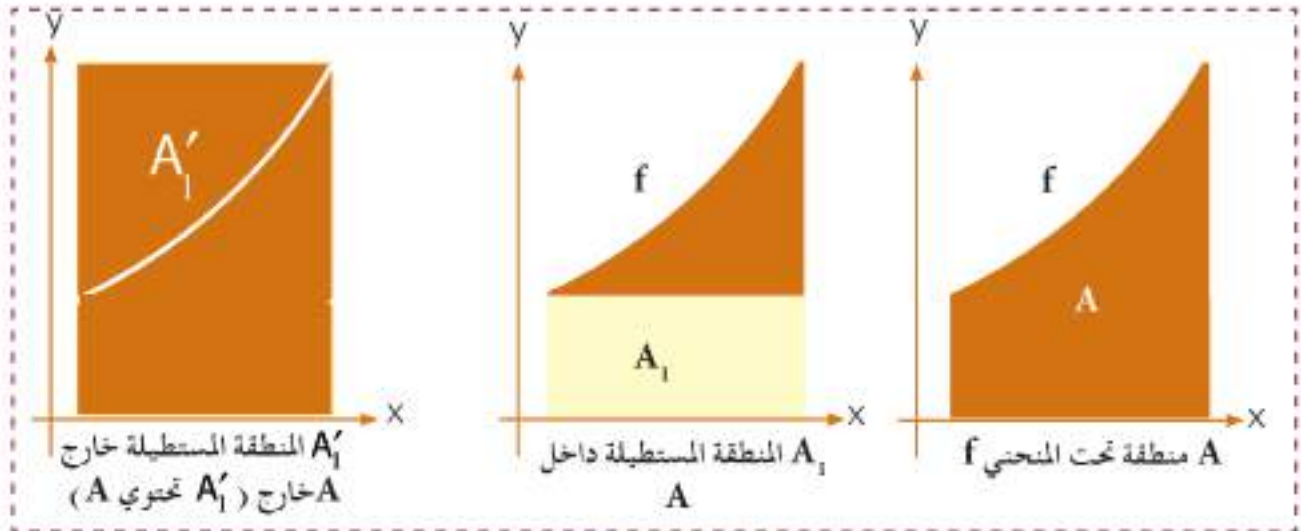
$$19000 - 15000 = 4000$$

في المحاولة الثانية: $15000 > \text{المبلغ} > 20000$ كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ومقدار الخطأ :

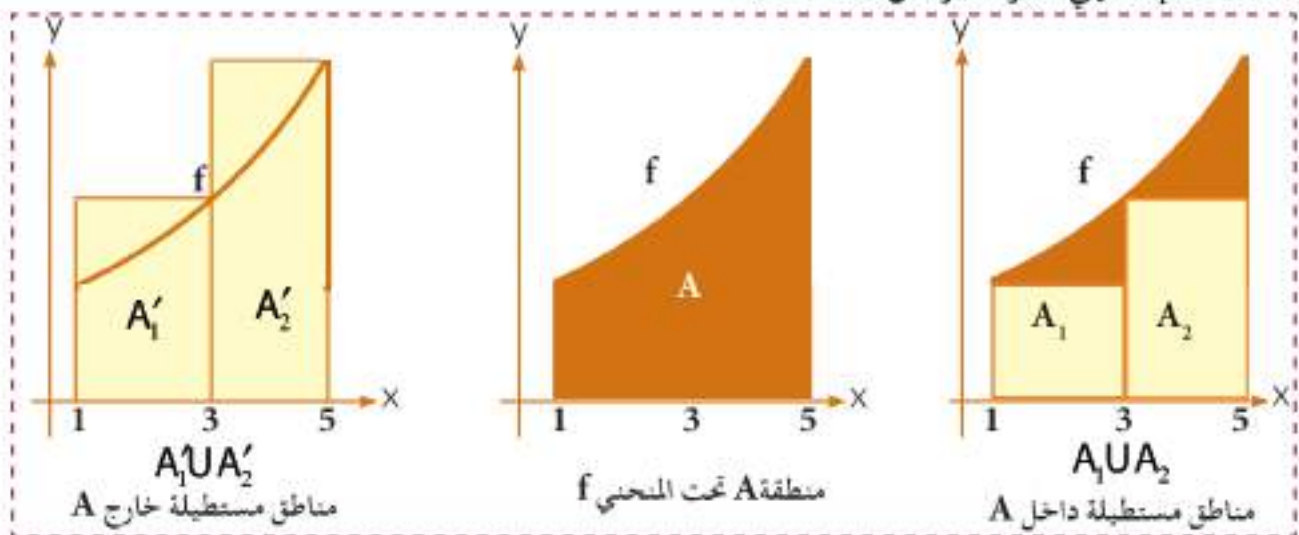
$$19000 - 17500 = 1500$$

اذاً كلما استطعنا ان نجعل الفرق بين الحدين الاعلى والادنى اقل كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ، وهكذا لحساب مساحة منطقة A بدقة اكبر نحاول ان نجعل مقدار هذه المساحة بين حدين بحيث يكون الفرق بينهما اقل ما يمكن .

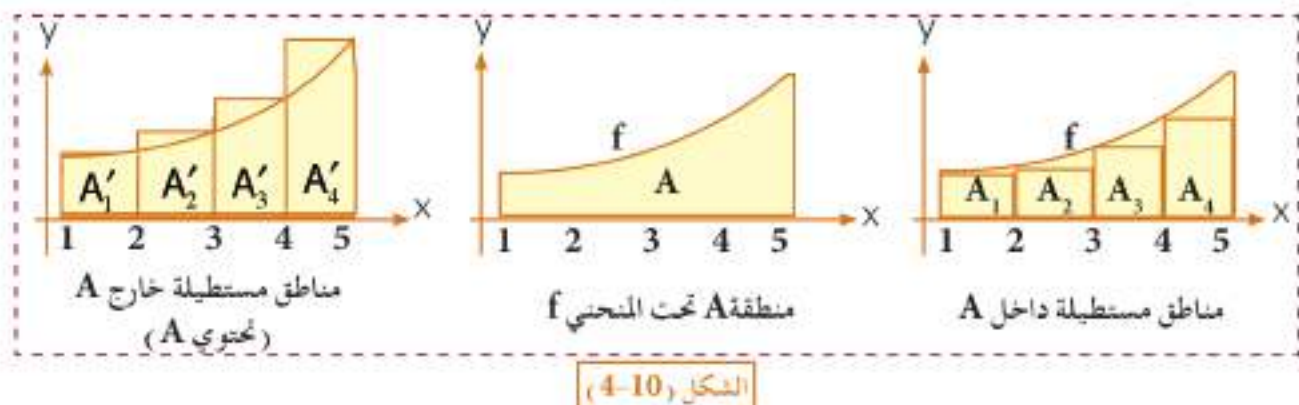
والحدين الاعلى والادنى هما مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية (المحتواة في A) ، ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A والاشكال (4-8) ، (4-9) ، (4-10) توضح هذه الفكرة.



لاحظ ان هناك فرقاً واضحاً بين مساحة A_1 ومساحة A' حيث مساحة A_1 أصغر بكثير من مساحة A ,
 اما مساحة A' فهي اكبر كثيراً من مساحة A .



في الشكل (4-10) تجزأت القاعدة [1, 5] الى أربعة فترات جزئية .



(1)

ملاحظة

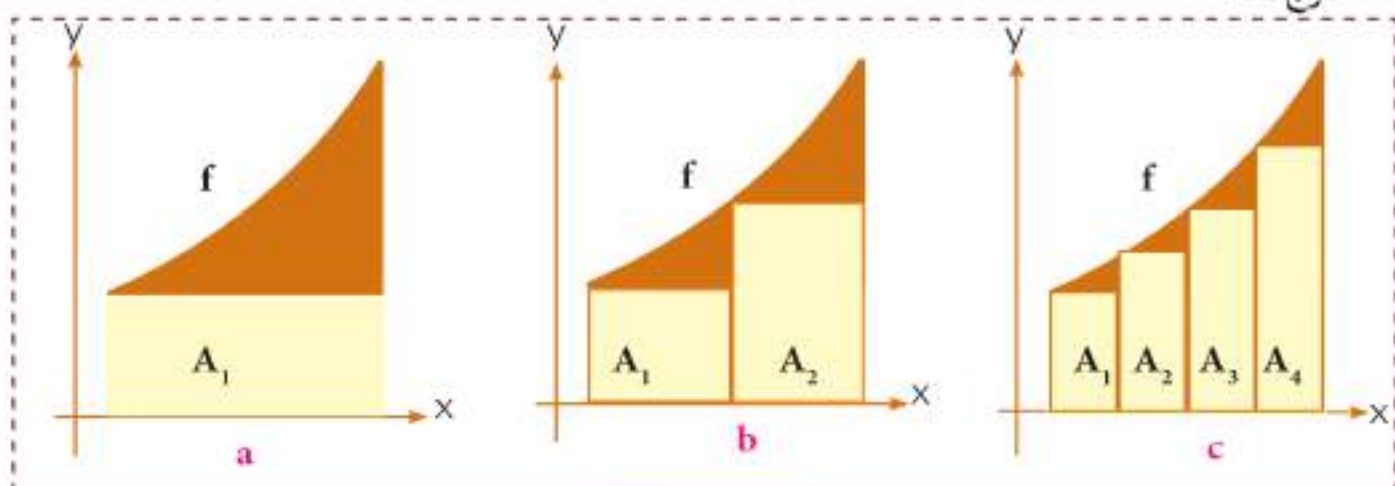
في الشكل (9 - 4) تجزأت الفترة الى فترتين جزئيتين هما $[1, 3]$, $[3, 5]$, في مثل هذه الحالة تسمى الثلاثية المرتبة (5, 3, 1) تجزئاً (partition) للفترة $[1, 5]$ ويرمز لها بالرمز $\sigma = (1, 3, 5)$ وبصورة عامة اذا كانت لدينا $[a, b]$ وارادنا ان نجزئها الى n من الفترات المنتظمة فان طول الفترة حيث $h = \frac{b-a}{n}$

(2)

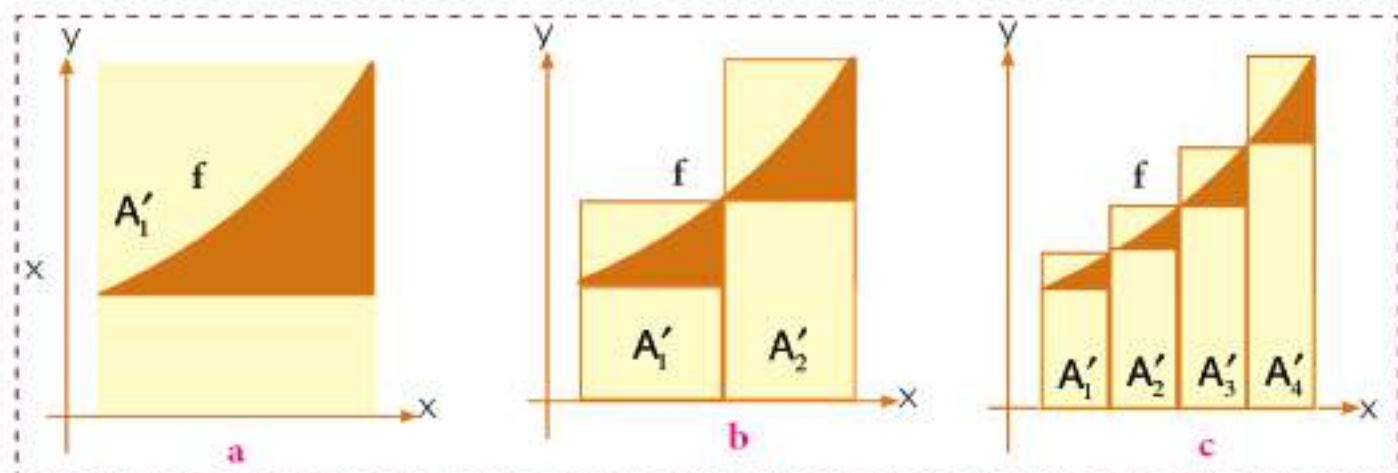
ملاحظة

انظر الى الشكلين (11 - 4) ، (12 - 4) تجد أنه كلما زادت نقاط التجزئ فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً. وبالتالي فان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A تصبح أكثر دقة.

∴ مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل $A \geq \text{مساحة } A \geq \text{مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج } A$.



الشكل (4-11)



الشكل (4-12)

مثال - 3

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الآتية :

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5, y = x^2 + 1\}$$

وذلك باستخدام التجزئة

- a) $\sigma_1 = (2, 3, 5)$
 b) $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5)$

الحل

a) $\sigma_1 = (2, 3, 5)$

ان تجزئة $\sigma_1 = (2, 3, 5)$ يعني ان الفترة $[2, 5]$ تجزأت الى الفترات الجزئية $[2, 3], [3, 5]$.

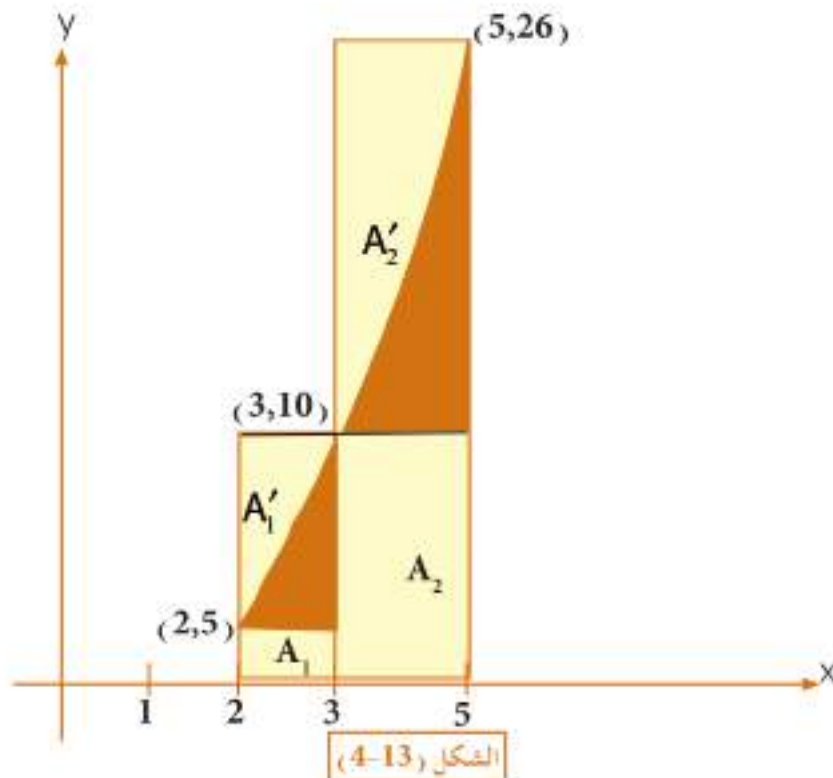
$$A_1 + A_2 = 1 \times 5 + 2 \times 10 = 25 \text{ unit}^2$$

كذلك

$$A'_1 + A'_2 = 1 \times 10 + 2 \times 26 = 62 \text{ unit}^2$$

بما ان مجموع مساحات المنطقة المستطيلة داخل A > مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A

$$\therefore 25 \leq A \leq 62 \Rightarrow A = \frac{25+62}{2} = 43\frac{1}{2} \text{ unit}^2 \quad \text{القيمة التقريبية لمساحة } A$$



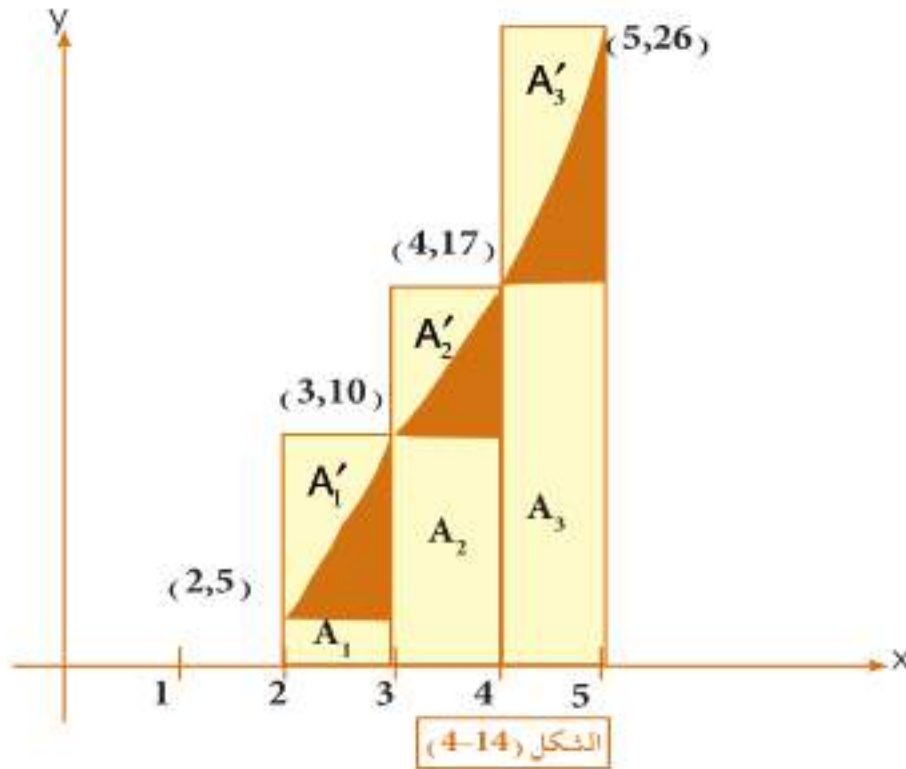
b) $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5)$

ان تجزئة $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5)$ يعني ان الفترة $[2, 5]$ تجزأت الى الفترات الجزئية $[2, 3], [3, 4], [4, 5]$

$$\therefore A_1 + A_2 + A_3 = 1 \times 5 + 1 \times 10 + 1 \times 17 = 32 \text{ unit}^2$$

$$\therefore A'_1 + A'_2 + A'_3 = 1 \times 10 + 1 \times 17 + 1 \times 26 = 53 \text{ unit}^2$$

$$\therefore A = \frac{32 + 53}{2} = 42 \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$



كما اوضحنا أنه كلما زادت عدد النقاط التجزئية فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً.

ملاحظة

$$62 - 25 = 37$$

ففي المثال السابق عندما كانت التجزئة $(2, 3, 5)$ كان الفرق :

$$53 - 32 = 21$$

وعندما كان تجزئة $(2, 3, 4, 5)$ كان الفرق :

[4-2] المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

تعلمت في البند السابق إيجاد مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية ومجموع مساحات المناطق المستطيلة الخارجية، وفي هذا البند سوف نعتبر الدالة : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

مستمرة على $[a, b]$ ونجد مجموع مساحات المستطيلات داخل المنطقة A (Lower Rectangles) ثم مجموع مساحة المستطيلات خارج المنطقة A (Upper Rectangles) (حيث A المنطقة تحت المنحنى f).

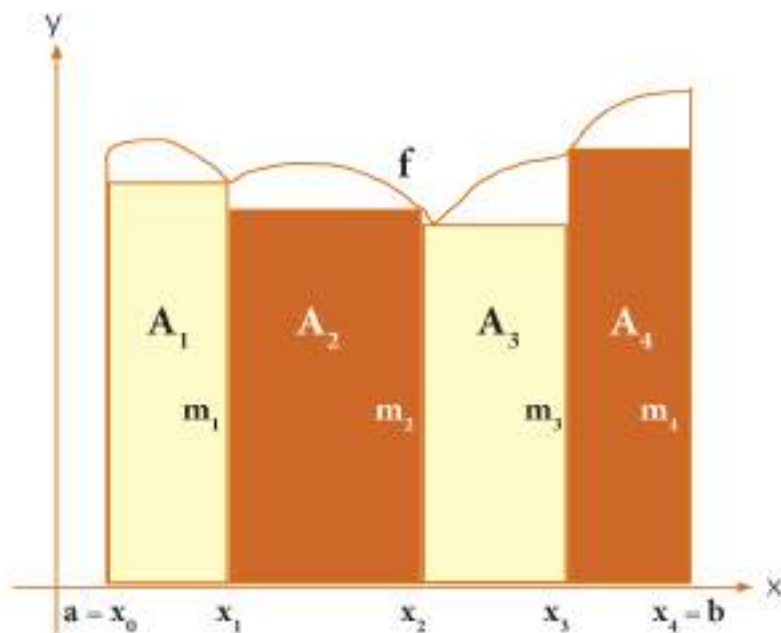
أولاً : نفرض أن : $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

حيث $\sigma = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

فتكون مساحة المنطقة المستطيلة A_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ وارتفاعها m_1 تساوي $m_1(x_1 - x_0)$ حيث m_1 (اصغر قيمة للدالة في هذه الفترة) .

وبالمثل مساحة المنطقة المستطيلة A_2 والتي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ وارتفاعها m_2 تساوي $m_2(x_2 - x_1)$. وهكذا

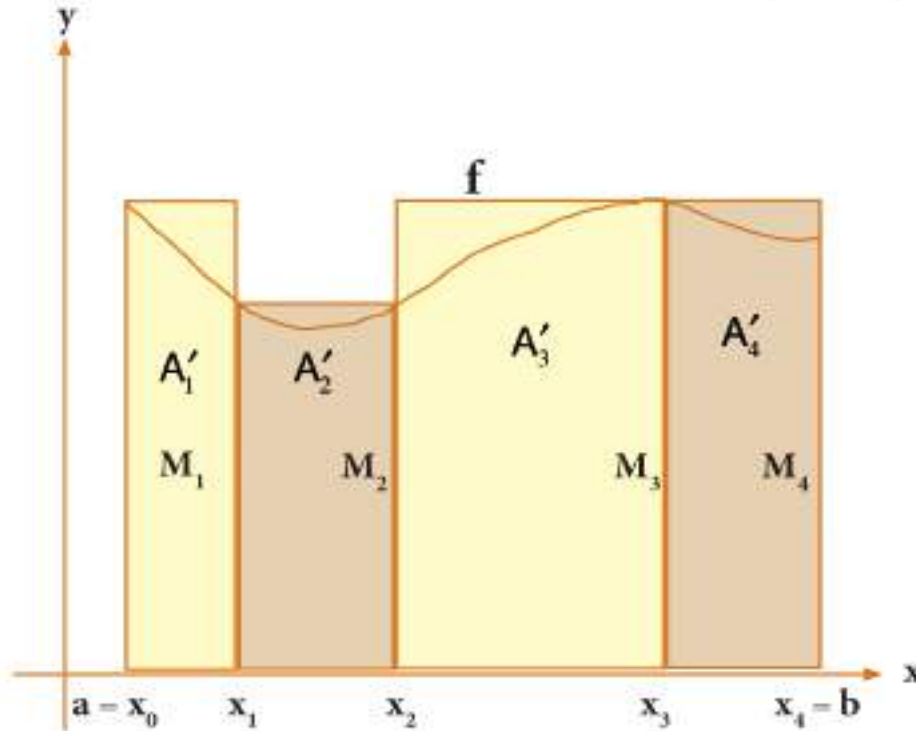
وبالتالي يكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A والتي سنرمز لها بالرمز $L(\sigma, f)$ تساوي $L(\sigma, f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3)$.



الشكل (4-15)

لاحظ أن : $A \geq L(\sigma, f)$ مساحة

كذلك في الشكل (4 - 16)



الشكل (4-16)

مساحة المنطقة A'_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ تساوي $M_1(x_1 - x_0)$ حيث M_1 أكبر قيمة للدالة في الفترة $[x_0, x_1]$ ومساحة المنطقة المستطيلة A'_2 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ تساوي $M_2(x_2 - x_1)$ وهكذا

فيكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A تساوي والتي سنرمز لها بالرمز $U(\sigma, f)$ تساوي

$$U(\sigma, f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + M_4(x_4 - x_3).$$

لاحظ أن : $U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$

$$L(\sigma, f) \leq \text{مساحة } A \leq U(\sigma, f)$$

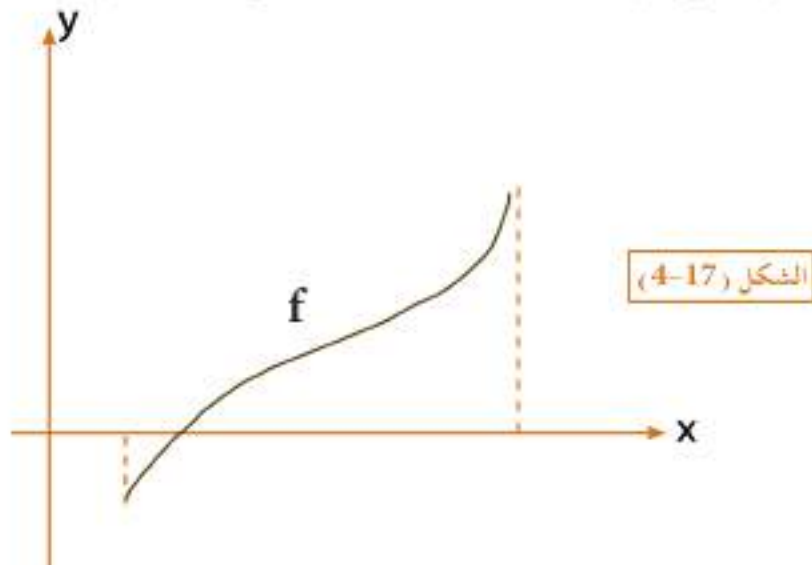
∴ أول قيمة تقريبية لمساحة A وفق التجزئة σ تساوي $\frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$.

ثانياً: عندما لا نشترط ان تكون $f(x) \geq 0$ ، $\forall x \in [a, b]$ كما في الشكل (17 - 4) فانه من الممكن ان يكون m (اصغر قيمة ممكنة للدالة) عدداً سالباً أو موجباً أو صفراً وبالتالي فانه من المتوقع ان تكون $L(\sigma, f)$ عدداً سالباً أو موجباً أو صفراً .

وبالمثل $U(\sigma, f)$ عدد موجباً أو سالباً أو صفراً وبما ان العدد السالب لا يقيس مساحة لهذا فاننا نسمي:

$L(\sigma, f)$ المجموع الاسفل

$U(\sigma, f)$ المجموع الاعلى



مثال - 4

لتكن $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + 2x$

جد المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$

الحل

نجزئ الفترة $[1, 4]$ الى ثلاثة فترات منتظمة فيكون .

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1 \Rightarrow \sigma = (1, 2, 3, 4)$$

∴ الفترات هي: $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ $f(x) = 5 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$

∴ لا توجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها . فنجد قيمة الدالة في طرفي الفترات ولايجاد

$L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ نعمل الجدول الآتي : فأيهما أصغر فهو m_i وإيهما أكبر فهو M_i

الفترة الجزئية $[a, b]$	طول الفترة h	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
$[1, 2]$	1	$m_1 = 5+2=7$	$M_1 = 5+4=9$	7	9
$[2, 3]$	1	$m_2 = 5+4=9$	$M_2 = 5+6=11$	9	11
$[3, 4]$	1	$m_3 = 5+6=11$	$M_3 = 5+8=13$	11	13
				$\sum h_i m_i = 27$	$\sum h_i M_i = 33$

$$\therefore \sum h_i m_i = L(\sigma, f) = 27 , \quad \sum h_i M_i = U(\sigma, f) = 33$$

مثال - 5

إذا كانت $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x^2$

أوجد كل من $L(\sigma, f)$, $U(\sigma, f)$ مستخدماً أربعة تجزيات منتظمة

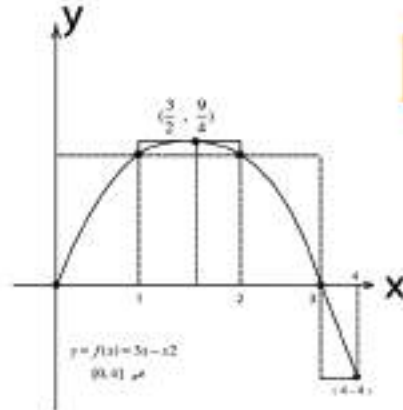
الحل

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1 \Rightarrow \sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$$

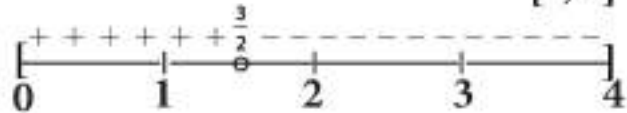
$$[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]$$

$$f(x) = 3x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1, 2]$$



أي أن العدد الحرج يوجد في الفترة $[1, 2]$



اشارة $f'(x)$

الفترة الجزئية [a , b]	طول الفترة h	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[0 , 1]	1	0	2	0	2
[1 , 2]	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
[2 , 3]	1	0	2	0	2
[3 , 4]	1	-4	0	-4	0
				$\sum h_i m_i = -2$	$\sum h_i M_i = 6\frac{1}{4}$

$$\therefore \sum h_i m_i = L(\sigma, f) = -2 \quad , \quad \sum h_i M_i = U(\sigma, f) = 6\frac{1}{4}$$

لاحظ أن $L(\sigma, f) \leq U(\sigma, f)$

ملاحظة في حل تمارين (1-4)

1 - نجزء الفترة المعطاة $[a, b]$ الى فترات جزئية بإيجاد h حيث $h = \frac{b-a}{n}$

n عدد الجزئيات منها نجد σ

2 - نجد $f'(x)$ ومنها نجد النقطة الحرجة بجعل $f'(x) = 0$

3 - نعمل جدول كما في الامثلة السابقة لتحديد M_i, m_i (لاحظ التزايد، التناقص) ومنه نجد

$$U(\sigma, f) \text{ , } L(\sigma, f)$$

تمارين

اوجد كل من $U(\sigma, f)$ ، $L(\sigma, f)$ لكل مما يأتي :

1. $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$

a) $\sigma = (-2, 0, 1)$

b) تقسيم الفترة $[-2, 1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

2. $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$

$\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$ اذا كان

3. $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x$

a) $\sigma = (1, 2, 4)$

b) استخدم ثلاث تجزئيات متساوية

[4-3] تعريف التكامل .

لاحظت في البند السابق أنه إذا كانت :

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه وفقاً للتجزئة σ يكون $U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$

والآن نسال السؤال الآتي : هل يوجد عدد k بحيث : $L(\sigma, f) \leq k \leq U(\sigma, f)$ لأي تجزئة للفترة $[a, b]$ ؟

والجواب : هو ما تنص عليه المبرهنة التالية :

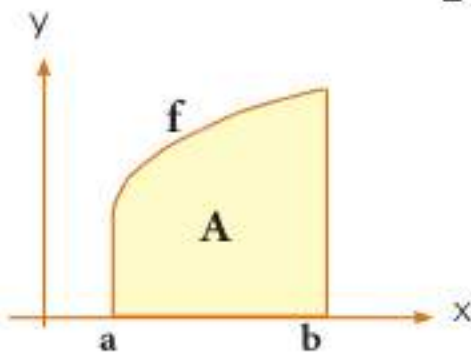
مبرهنة [4-3-1]

إذا كانت : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد عدد وحيد k بحيث لأي تجزئة σ للفترة $[a, b]$ فإن $L(\sigma, f) \leq k \leq U(\sigma, f)$ نسمي العدد k التكامل المحدد للدالة f على $[a, b]$ ونرمز له $\int_a^b f(x) dx$ ويقرأ التكامل من a إلى b للدالة f ونسمي a, b حدي التكامل

ملاحظات

1. إذا كانت f دالة مستمرة على $[a, b]$ فإن : $L(\sigma, f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(\sigma, f)$

وتكون القيمة التقريبية للتكامل $\frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \int_a^b f(x) dx$



2. إذا كانت : $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

فإن $\int_a^b f(x) dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت

منحنى f وهو عدد غير سالب .

حيث dx تشير إلى أن حدي التكامل a, b قيمتان للمتغير x

الشكل (4-19)

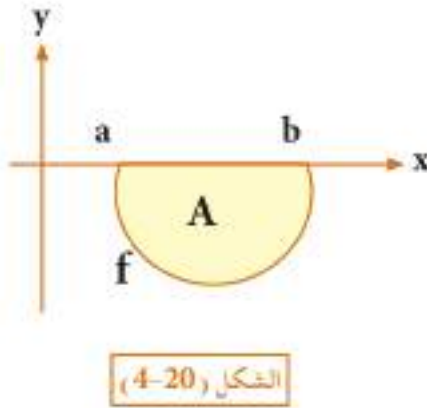
3. إذا كانت $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$ فإن:

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0$$

وهذا لا يدل على المساحة، أما مساحة

المنطقة A الموضحة في الشكل (20-4) فهي تساوي

$$-\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



4. إن قيمة $\int_a^b f(x) dx$ تتوقف على الفترة $[a, b]$ وعلى الدالة $f(x)$

مثال -1

لتكن $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2 dx$ إذا جزئت الفترة $[1, 3]$ إلى جزئيتين.

الحل

$$f(x) = x^2$$

f دالة مستمرة على الفترة $[1, 3]$ كثيرة حدود.

$$\therefore f'(x) = 2x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

أي أن النقطة الحرجة عند $x = 0$ وأن $0 \notin [1, 3]$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

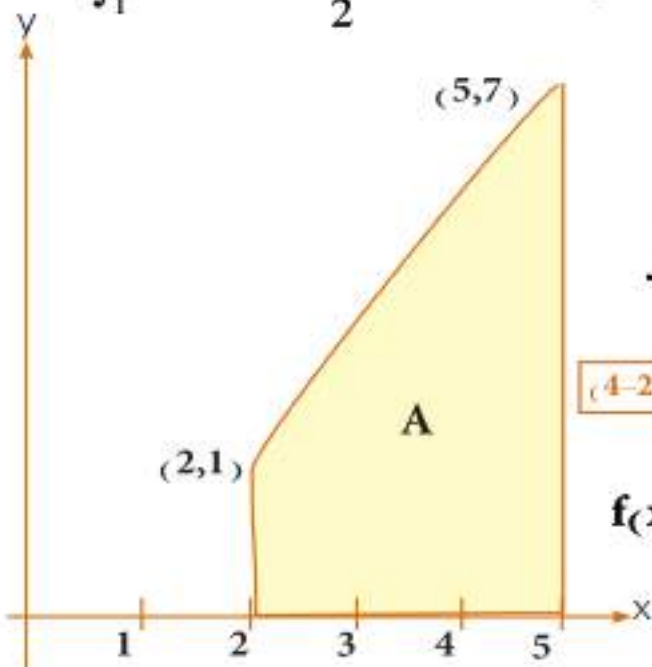
الفترات الجزئية $[a, b]$	طول الفترة $b - a$	h, m_i	h, M_i
$[1, 2]$	1	1	4
$[2, 3]$	1	4	9

∴ أعظم قيمة وأصغر قيمة للدالة تكون عند طرفي كل فترة جزئية أي عند طرفي كل من $[1,2]$ ، $[2,3]$

$$L(\sigma, f) = (1 \times 1) + (1 \times 4) = 1 + 4 = 5$$

$$U(\sigma, f) = (1 \times 4) + (1 \times 9) = 4 + 9 = 13$$

$$\therefore \int_1^3 x^2 dx = \frac{5+13}{2} = 9 \quad \text{تقريباً}$$



مثال - 2

لتكن $f : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{حيث } f(x) = 2x - 3 \text{ أوجد } \int_2^5 f(x) dx$$

الشكل (4-21)

الحل

لاحظ ان $f(x) > 0 \quad \forall x \in [2, 5]$

∴ يمكن إيجاد $\int_2^5 f(x) dx$ من مساحة A وهي منطقة شبه منحرف

∴ مساحة المنطقة $A = \frac{1}{2} \times \text{مجموع طولي القاعدتين المتوازييتين} \times \text{طول الارتفاع}$

$$\therefore A = \frac{1}{2} [1 + 7] (3) = \frac{1}{2} (8)(3) = 12 \text{ Unit}^2$$

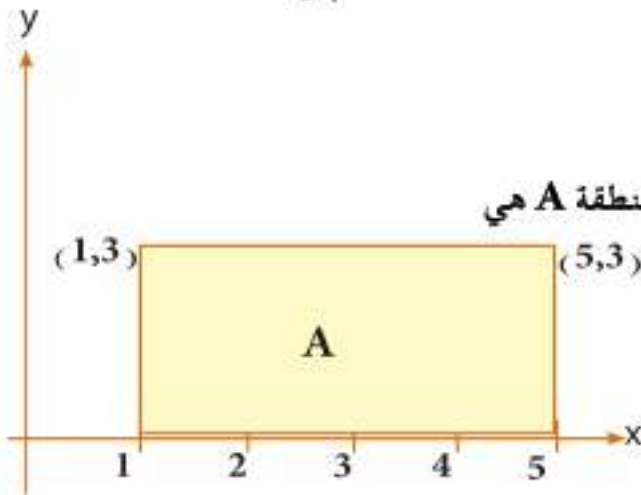
$$\therefore \int_2^5 f(x) dx = 12$$

أو يمكن إيجاد $\int_2^5 f(x) dx$ بالطريقة السابقة وكما يأتي:

فترة التجزئة $[a, b]$	طول الفترة $h_i = b - a$	M_i	m_i	$h_i M_i$	$h_i m_i$
$[2, 3]$	1	3	1	3	1
$[3, 5]$	2	7	3	14	6
				$\sum h_i M_i = 17$	$\sum h_i m_i = 7$

$$\int_2^5 (2x - 3) dx = \frac{17 + 7}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ Unit}^2$$

لكن $f(x) = 3$, $f: [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ أوجد $\int_1^5 f(x)dx$



الحل

من الشكل (22 - 4) نلاحظ ان المنطقة A هي

منطقة مستطيلة طول قاعدتها =

$4 = (5 - 1)$ وعرضها 3

$$\therefore A = (4)(3) = 12 \text{ unit}^2$$

الشكل (22 - 4)

$$\therefore \int_1^5 f(x)dx = 12 \text{ unit}^2$$

طريقة ثانية:

فترة التجزئة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	M_i	m_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				$\sum h_i m_i = 12$	$\sum h_i M_i = 12$

$$L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 12, \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 12$$

$$\int_1^5 3dx = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ Unit}^2$$

تمارين

1. أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x} dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$.

2. لتكن $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 3$

أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x) dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحنى f .

3. أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_2^4 (3x^2 - 3) dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$.

4. أوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^2 f(x) dx$ حيث $f(x) = -4$

5. أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 x^3 dx$ باستخدام أربعة تجزئات منتظمة.

[4-4] النظرية الأساسية للتكامل - الدالة المقابلة:

لقد تعلمنا فيما سبق طريقة إيجاد قيمة للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ حيث f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ كما وجدنا في بعض الحالات الخاصة قيمة دقيقة لهذا التكامل المحدد (باستخدام المساحة).

والمبرهنة الآتية تساعدنا في إيجاد قيمة التكامل المحدد .

مبرهنة [4-4-1]

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث :

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\text{ويكون: } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

تسمى F الدالة المقابلة للدالة f (Antiderivative of The Function) على الفترة $[a,b]$

فمثلاً : إذا كانت $f : [1,2] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 2x$

فإن $F : [1,2] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x) = x^2$

$$F'(x) = 2x = f(x) \quad , \quad \forall x \in (1,2)$$

وعليه فإن :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= F(2) - F(1) \\ &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

$$[F(x)]_1^2$$

$F(2) - F(1)$ تكتب بالصورة

نشير إلى أن

ملاحظة

مثال - 1

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1, 5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة
للدالة f فجد $\int_1^5 f(x) dx$.

الحل

$$\int_1^5 f(x) dx = F(5) - F(1) = 3(25) - 3(1) = 75 - 3 = 72$$

ويمكن ان نكتب ذلك بالصورة الآتية :

$$\int_1^5 f(x) dx = [F(x)]_1^5 = [3x^2]_1^5 = 75 - 3 = 72$$

مثال - 2

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي :

$$F(x) = \sin x, \quad F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{فأوجد : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال - 3

أثبت فيما إذا كانت $F(x) = x^3 + 2$ ، $F : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

هي دالة مقابلة للدالة : $f(x) = 3x^2$

الحل

$\therefore F(x) = x^3 + 2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

(لأنها دالة كثيرة الحدود)

$\therefore F$ مستمرة على $[1, 3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1, 3)$ ،

$$\therefore F'(x) = 3x^2 = f(x), \quad \forall x \in (1, 3)$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f على $[1, 3]$.

مثال - 4

أثبت أن الدالة : $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ، $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هي دالة مقابلة للدالة

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , f(x) = \cos 2x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx \text{ ثم اوجد}$$

الحل

$$f(x) = \cos 2x , f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كما تعلمنا في الصف الخامس العلمي كذلك فان :

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\therefore F'(x) = \frac{1}{2} (\cos 2x)(2) = \cos 2x = f(x) , \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f .

$$\therefore \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

حسب المبرهنة (2-4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2} \times 1 - 0 = \frac{1}{2}.$$

وفي ما يلي جدول مساعد يبين الدالة f والدالة المقابلة لها F في حالات خاصة . وبإمكانك عزيزي الطالب أن تتحقق من صحة ذلك بإثبات أن :

$$F'(x) = f(x)$$

وفيما يلي جدول مساعد يبين الدالة f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n, n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n \cdot f'(x), n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a} \tan(ax+b)$
$\csc^2(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a} \sec ax$
$\csc ax \cot ax$	$-\frac{1}{a} \csc ax$

مجموعة الدوال المقابلة لاية دالة f كما في الجدول هي $F + C$ حيث C عدد ثابت حقيقي

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx \quad \text{أوجد}$$

مثال - 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx \quad \text{أوجد}$$

مثال - 6

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cot \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\pi}{4} = 0 + 1 = 1$$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx \quad \text{أوجد}$$

مثال - 7

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec \frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

الحل

$$\int_1^3 x^3 \, dx \quad \text{جد}$$

مثال - 8

$$\int_1^3 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

الحل

[4-5] خواص التكامل المحدد:

أولاً:

1. f دالة مستمرة على $[a, b]$ فإذا كانت :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \text{ فإن } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

فمثلاً :

$$a) f(x) = x^2 \geq 0, \forall x \in [-1, 2] \quad \text{لأن } \int_{-1}^2 x^2 dx \geq 0$$

$$b) f(x) = 3 > 0, \forall x \in [-2, 3] \quad \text{لأن } \int_{-2}^3 3 dx > 0$$

$$c) f(x) = (x+1) > 0, \forall x \in [2, 3] \quad \text{لأن } \int_2^3 (x+1) dx > 0$$

2. f دالة مستمرة على $[a, b]$ فإذا كانت : $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

فمثلاً :

$$a) f(x) = -2, f(x) < 0, \forall x \in [1, 2] \quad \text{لأن } \int_1^2 (-2) dx < 0$$

$$b) f(x) = x, f(x) < 0, \forall x \in [-2, -1] \quad \text{لأن } \int_{-2}^{-1} x dx < 0$$

ثانياً:

f دالة مستمرة على $[a, b]$ ، c عدداً حقيقياً ثابتاً فإن : $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$

مثال - 9

$$\text{إذا كان } \int_2^5 f(x) dx = 8 \text{ فأوجد } \int_2^5 5f(x) dx$$

الحل

$$\int_2^5 5f(x) dx = 5 \int_2^5 f(x) dx = 5(8) = 40$$

ثالثاً:

إذا كانت الدالتان f_1, f_2 مستمرتين على الفترة $[a, b]$ فإن : $\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على $[a, b]$

مثال - 10 - إذا كانت $\int_1^3 f_1(x)dx = 15$, $\int_1^3 f_2(x)dx = 17$ فأوجد كلا من:

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x)) dx , \int_1^3 (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

الحل

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_1^3 f_1(x)dx + \int_1^3 f_2(x)dx = 15 + 17 = 32$$

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_1^3 f_1(x)dx - \int_1^3 f_2(x)dx = 15 - 17 = -2$$

مثال - 11 - إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)dx$

الحل

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= \int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = \int_1^2 3x^2dx + \int_1^2 2x dx \\ &= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = (8 - 1) + (4 - 1) = 7 + 3 = 10 \end{aligned}$$

رابعاً:

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ وكانت $c \in (a, b)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال - 12 - إذا كانت $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_3^7 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5 + 8 = 13$$

مثال - 13

لكن $f(x) = |x|$ اوجد $\int_{-3}^4 f(x) dx$

الحل

f دالة مستمرة على $[-3, 4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \forall x \geq 0 \\ -x, & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^4 f(x) dx = \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$= \left[0 + \frac{9}{2} \right] + \left[\frac{16}{2} - 0 \right] = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

مثال - 14

إذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \forall x \geq 1 \\ 3, & \forall x < 1 \end{cases}$$

فأوجد

$$\int_0^5 f(x) dx$$

الحل

f مستمرة على الفترة $[0, 5]$ وذلك لأنها :

مستمرة عند $x = 1$ لأن :

$$(i) f(1) = 2(1) + 1 = 3 \text{ معرفة}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \text{ موجودة} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x : x < 1\}$ ، $\{x : x > 1\}$ وبما ان الدالة مستمرة على $[0,5]$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^5 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx \\ &= \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx = [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5 \\ &= [3-0] + [25+5] - [2] = 3+28 = 31\end{aligned}$$

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0 \quad b) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

خامساً:

مثلاً:

$$a) \int_3^3 x dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

او اختصاراً وحسب القاعدة

$$\int_3^3 x dx = 0$$

$$\begin{aligned}b) \int_3^2 3x^2 dx &= -\int_2^3 3x^2 dx \\ &= -[x^3]_2^3 \\ &= -[27] + [8] = -19\end{aligned}$$

تمارين

1. احسب كلاً من التكاملات الآتية:
- a) $\int_{-2}^2 (3x-2)dx$ b) $\int_1^2 (x^{-2}+2x+1)dx$
- c) $\int_1^3 (x^4+4x)dx$ d) $\int_0^2 |x-1|dx$
- e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x+\cos x)dx$ f) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1} dx$ g) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2} dx$

2. أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$$F: [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ حيث } F(x) = \sin x + x$$

$$f: [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ حيث } f(x) = 1 + \cos x \text{ ثم احسب } \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$$

3. أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

- a) $\int_1^3 (x-2)(x+1)^2 dx$ b) $\int_{-1}^1 |x+1|dx$
- c) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1} dx$ d) $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx$

4. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x, & \forall x \geq 3 \\ 6, & \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)dx$

5. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \forall x \geq 0 \\ 2x, & \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^3 f(x)dx$

[4-6] التكامل غير المحدد : Indefinite Integral

عرفنا في النظرية الاساسية للتكامل أنه إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه توجد دالة F مقابلة F مستمرة على $[a, b]$ بحيث أن: $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$ ، فمثلاً :

$f(x) = 2x$ هي دالة مقابلة للدالة $F(x) = x^2$ ، $F : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ،
ولكن هل $F(x) = x^2$ دالة مقابلة وحيدة للدالة $F'(x) = 2x$ ؟
وقبل الاجابة عن هذا السؤال نتأمل الدوال الآتية :

- 1) $F_1 : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^2 + 1$
- 2) $F_2 : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$
- 3) $F_3 : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_3(x) = x^2 - \sqrt{2}$
- 4) $F_4 : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_4(x) = x^2 - 5$

اننا نلاحظ أن كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 لها صفات F نفسها أي أن كلاً منها :

- (i) مستمرة على $[1, 3]$
- (ii) قابلة للاشتقاق على $(1, 3)$
- (iii) $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = F_4'(x) = 2x$, $\forall x \in (1, 3)$

وبناءً على ذلك يمكن القول بأن كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 دالة مقابلة الى f .

أي انه توجد اكثر من دالة مقابلة للدالة المستمرة على $[1, 3]$ والفرق بين أي دالتين مقابلتين للدالة f يساوي عدداً ثابتاً لاحظ أن :

$$F_1(x) - F_2(x) = (x^2 + 1) - (x^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$F_1(x) - F_4(x) = (x^2 + 1) - (x^2 - 5) = 6 \quad \text{وهكذا}$$

وبصورة عامة

إذا كانت للدالة f المستمرة على $[a, b]$ دالة مقابلة F فإن يوجد عدد لانهاضي من الدوال المقابلة للدالة f ، كل منها تكون من الصورة : $F + C$ حيث C عدداً ثابتاً والفرق بين أي إثنين منها يساوي عدداً ثابتاً.

تسمى مجموعة الدوال المقابلة التي على الصورة $F + C$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على $[a, b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)dx$ إذا كان رمز المتغير x .
كما يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على الصورة :
عدد ثابت $C \in \mathbb{R}$ ، $\int f(x)dx = F(x) + C$

مثال - 1 أوجد $\int f(x)dx$ إذا علمت أن :

- a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
- b) $f(x) = \cos x + x^{-2}$
- c) $f(x) = x + \sec x \tan x$
- d) $f(x) = \sin(2x + 4)$

الحل

$$a) \int (3x^2 + 2x + 1)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 + x^2 + x + c$$

$$b) \int (\cos x + x^{-2})dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sin x - \frac{1}{x} + c$$

$$c) \int (x + \sec x \tan x)dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

$$d) \int \sin(2x + 4)dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + 4) + c$$

جد التكاملات لكل مما يأتي :

a. $\int (x^2 + 3)^2 (2x) dx$

لنفرض أن

الحل

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3)^2 (2x) dx &= \int [f(x)]^2 f'(x) dx = \frac{1}{3} [f(x)]^3 + c \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 3)^3 + c \end{aligned}$$

b. $\int (3x^2 + 8x + 5)^6 (3x + 4) dx$

$$f(x) = 3x^2 + 8x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x + 8 \quad \text{نفرض أن :}$$

$$\therefore \int (3x^2 + 8x + 5)^6 (3x + 4) dx = \frac{1}{2} \int (3x^2 + 8x + 5)^6 (6x + 8) dx$$

$$\frac{1}{2} \int [f(x)]^6 f'(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{[f(x)]^7}{7} + c = \frac{1}{14} (3x^2 + 8x + 5)^7 + c$$

c. $\int \sin^4 x \cos x dx$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \quad \text{نفرض أن :}$$

$$\therefore \int \sin^4 x \cos x dx = \int [f(x)]^4 \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^5}{5} + c = \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

d. $\int \tan^6 x \sec^2 x dx$

نفرض أن :

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

$$\therefore \int \tan^6 x \sec^2 x dx = \int [f(x)]^6 f'(x) dx = \frac{[f(x)]^7}{7} + c = \frac{1}{7} \tan^7 x + c$$

[4-6-1] تكامل الدوال المثلثية التربيعية

$$1. \int \sec^2 \theta \, d\theta = \tan \theta + c$$

$$2. \int \csc^2 \theta \, d\theta = -\cot \theta + c$$

$$3. \int \tan^2 \theta \, d\theta = \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \int \sec^2 \theta \, d\theta - \int d\theta = \tan \theta - \theta + c$$

$$4. \int \cot^2 \theta \, d\theta = \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta = -\cot \theta - \theta + c$$

$$5. \int \sin^2 \theta \, d\theta = \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int d\theta - \frac{1}{4} \int \cos 2\theta (2) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + c$$

$$6. \int \cos^2 \theta \, d\theta = \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + c$$

أمثلة

جد تكاملات كل مما يأتي :

$$1. \int 9 \sin 3x \, dx = 3 \int 3 \sin 3x \, dx = -3 \cos 3x + c$$

$$2. \int x^2 \sin x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sin x^3 \, dx = -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$$

$$3. \int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} \, dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \, dx$$

$$= \pm \int (\sin x - \cos x) \, dx = \pm (\cos x + \sin x) + c$$

$$4. \int \sin^4 x \, dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{32} \int 4 \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$5. \int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$$

$$6. \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2 \tan^2 x} + c$$

$$7. \int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx \\ = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$8. \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

$$9. \int \sin 6x \cos^2 3x dx = \int (2 \sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x dx = 2 \int \cos^3 3x \sin 3x dx \\ = \frac{-2}{3} \times \frac{\cos^4 3x}{4} + c = -\frac{1}{6} \cos^4 3x + c$$

$$10. \int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx \\ = \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx \\ = \int (\cos 2x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

$$11. \int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{12} \sin 6x + c$$

$$12. \int \cot^2 5x dx = -\frac{1}{5} \cot 5x - x + c$$

$$13. \int \tan^2 7x dx = \frac{1}{7} \tan 7x - x + c$$

تمارين

جد تكاملات كل مما يلي ضمن مجال الدالة :

$$1. \int \frac{(2x^2 - 3)^2 - 9}{x^2} dx$$

$$3. \int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$$

$$5. \int \frac{x}{(3x^2 + 5)^4} dx$$

$$7. \int \sin^3 x dx$$

$$9. \int (3x^2 + 1)^2 dx$$

$$11. \int (1 + \cos 3x)^2 dx$$

$$13. \int \csc^2 2x dx$$

$$15. \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x} dx$$

$$17. \int \sin^2 8x dx$$

$$2. \int \frac{(3 - \sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}} dx$$

$$4. \int \csc^2 x \cos x dx$$

$$6. \int \sqrt[3]{x^2 + 10x + 25} dx$$

$$8. \int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{\sqrt{x} - x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$12. \int \sec^2 4x dx$$

$$14. \int \tan^2 8x dx$$

$$16. \int \cos^2 2x dx$$

$$18. \int \cos^4 3x dx$$

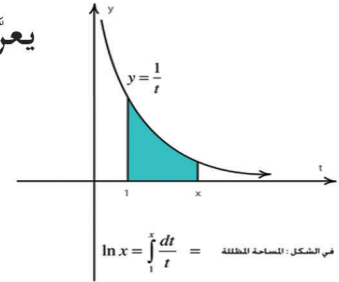
[4-7] اللوغاريتم الطبيعي The Natural Logarithmic

درسنا دوالاً مألوفة نوعاً ما . فكثيرات الحدود والدوال النسبية وغيرها من الدوال الجبرية تنتج عن عمليات مألوفة في الحساب والجبر ، ويمكن مطابقة قيم الدوال المثلثية باحداثيات نقط على دائرة الوحدة . اما الان فندرس دالة اللوغاريتم الطبيعي التي تعتمد على حساب التفاضل والتكامل حتى في تعريفها .

تعريف [4-7-1]

يعرّف لوغاريتم x الطبيعي ، ويرمز له بـ $(\ln x)$ بأنه :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad ; \quad \forall x > 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$



يمثل هذا التكامل لكل x اكبر من 1 ، المساحة المحدودة من الاعلى بالمنحني $y = \frac{1}{t}$ ومن الاسفل باخورد t ،

ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمستقيم $t = x$

يعرّف لوغاريتم x الطبيعي ، ويرمز له بـ $(\ln x)$ بأنه :

اي اذا كان $x = 1$ ، تطابق الحدان الايمن واليسر للمساحة واصبحت المساحة صفراً .

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0 \quad \left(\int_a^a f(x) dx = 0 \right)$$

اما اذا كانت x اصغر من 1 واكبر من الصفر فعندئذ يكون الحد اليسر هو المستقيم $t = x$ ، والحد الايمن هو $t = 1$ وفي هذه الحالة يكون التكامل :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

مساويا للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحني بين x و 1 .

* ينسب اول اكتشاف للوغاريتم الطبيعي الى النبيل الاسكتلندي John Napier (1550 - 1617)

وفي كل الحالات ، x عدداً موجباً ، فإنه يمكن حساب قيمة التكامل المحدد في المعادلة (1) الى اي عدد نرغب فيه من الارقام العشرية كما مر بنا في حساب المساحة تحت المنحني بالتقريب .
وبما ان الدالة $F(x) = \ln x$ معرفة بالتكامل

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall x > 0$$

فانه من المبرهنة الاساسية لحساب التكامل في البند (4-4) نعلم ان :

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

اي ان :

كما يمكننا الحصول على صيغة أعم عندما يكون لدينا $\ln u$ حيث u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x

فقاعدة السلسلة للمشتقات (Chain Rule) تعطينا :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln u) &= \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ \therefore \frac{d}{dx}(\ln u) &= \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \Rightarrow d(\ln u) = \frac{1}{u} du \end{aligned}$$

مثال - 1 - اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot \frac{d(3x^2 + 4)}{dx} \\ &= \frac{6x}{3x^2 + 4} \end{aligned}$$

الحل

ان الصيغة $d(\ln u) = \frac{1}{u} du$ تقودنا الى $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$ وبشرط ان تكون u موجبة

مثال - 2 - جد $\int \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \sin \theta}$

الحل

نفرض

$$u = 1 + \sin \theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos \theta \Rightarrow du = \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \sin \theta} &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln|1 + \sin \theta| + c \end{aligned}$$

[4-7-2] دالة اللوغاريتم الطبيعي.

$$y = \ln x$$

لتكن

$$\{(x, y) : y = \ln x, x > 0\}$$

لو ابدلنا x و y في مجموعة الأزواج المرتبة:

$$\begin{aligned} x &= \ln^{-1}(y) \quad , \quad y > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ x &= e^y \end{aligned}$$

لحصلنا على دالة ترمز لها

ويكون مجال $\ln^{-1}(y)$ هو مدى $\ln(x)$

نتيجة : الدالة الأسية e^x (أساس e) هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي ونستنتج جميع خواصها من هذه الحقيقة.

مبرهنة [4-7-3]

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

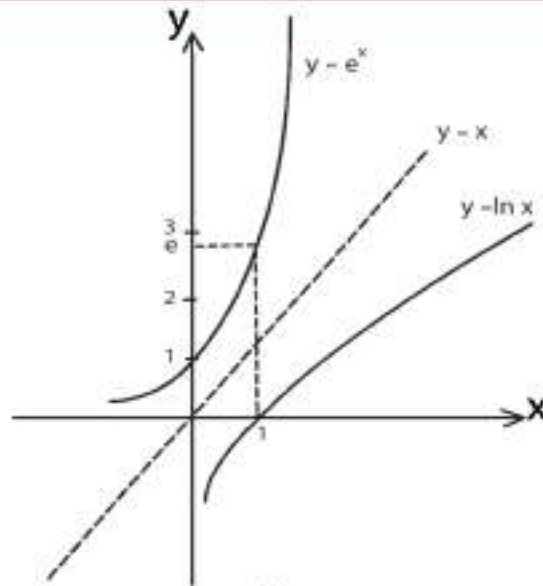
$$y = e^x$$

$$\therefore x = \ln y \Rightarrow$$

$$1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$



البرهان

لتكن

وبصورة عامة

$$y = e^{\tan x} \quad \text{فجد} \quad \frac{dy}{dx}$$

لتكن

مثال - 3 -

الحل

$$\frac{d(e^{\tan x})}{dx} = e^{\tan x} \cdot \frac{d(\tan x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

ملاحظة

ان صيغة التفاضل $d(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$ تقودنا الى صيغة التكامل : $\int e^u du = e^u + c$

$$\int x e^{x^2} dx \quad \text{جد}$$

مثال - 4 -

الحل

$$x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$$

نفرض ان :

$$\therefore \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

تعريف [4-7-4]

اذا كان a عددا موجبا ، فان $a^u = e^{u \ln a}$

مبرهنة [4-7-5]

$$\frac{da^u}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \ln a$$

$$\frac{da^u}{dx} = \frac{d}{dx} (e^{u \ln a})$$

البرهان :

$$= e^{u \ln a} \cdot \frac{d}{dx} (u \ln a)$$

$$\therefore \frac{da^u}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \ln a$$

مثال - 5 - جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = 3^{2x-5}$ b) $y = 2^{-x^2}$ c) $y = 5^{\sin x}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{a) } y = 3^{2x-5} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5} (2) \cdot \ln 3 \\ &= (2 \ln 3) 3^{2x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y = 2^{-x^2} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2} (-2x) \cdot \ln 2 \\ &= (-2x \ln 2)(2^{-x^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y = 5^{\sin x} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} \cdot \cos x (\ln 5) \\ &= (\ln 5) \cdot 5^{\sin x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

تمارين

1 - جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = \ln 3x$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \ln(x^2)$

d) $y = (\ln x)^2$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

f) $y = \ln(2 - \cos x)$

g) $y = e^{-5x^2 + 3x + 5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}}$

i) $y = 7^{\frac{-x}{4}}$

j) $y = x^2 e^x$

2 - جد التكاملات الآتية :

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2 + 9} dx$

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x} dx$

e) $\int_0^1 (1 + e^x)^2 e^x dx$

f) $\int_0^1 \frac{3x^2 + 4}{x^3 + 4x + 1} dx$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}}$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan x} dx$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

j) $\int \cot^3 5x dx$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$

l) $\int_1^2 x e^{-\ln x} dx$

$$a) \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$$

$$b) \int_{-2}^4 |3x-6| dx = 30$$

$$4 - f(x) \text{ دالة مستمرة على الفترة } [-2, 6] \text{ فاذا كان } \int_1^6 f(x) dx = 6 \text{ وكان}$$

$$\int_{-2}^1 f(x) dx \text{ فجد } \int_{-2}^6 [f(x)+3] dx = 32$$

$$5 - \text{جد قيمة } a \in \mathbb{R} \text{ اذا علمت أن } \int_1^a (x + \frac{1}{2}) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$$6 - \text{لتكن } f(x) = x^2 + 2x + k \text{ حيث } k \in \mathbb{R}, \text{ دالة نهايتها الصغرى تساوي } (-5) \text{ جد } \int_1^3 f(x) dx$$

$$7 - \text{إذا كان للمنحني } f(x) = (x-3)^3 + 1 \text{ نقطة انقلاب } (a,b) \text{ جد القيمة العددية للمقدار}$$

$$\int_0^b f'(x) dx - \int_0^a f''(x) dx$$

[4-8] إيجاد مساحة المنطقة المستوية.

Plane Area by Definite Integral

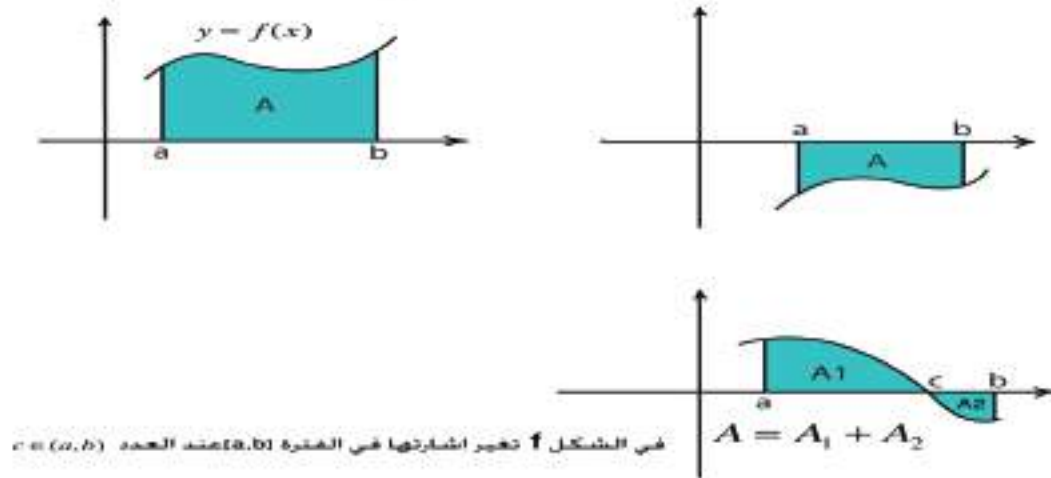
[4-8-1] مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات

The area between a Curve and the x-axis

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a, x = b$:

إذا كانت $f(x) > 0$ فإن المساحة A تساوي : $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت $f(x) < 0$ فإن المساحة A تساوي : $A = -\int_a^b f(x)dx$



الشكل (4-23)

وعندما يقطع منحني الدالة $y = f(x)$ محور السينات في $x = a, x = b$ نتبع الخطوات الآتية :

خطوات إيجاد المساحة عندما f تمتلك قيم موجبة وقيم سالبة على الفترة $[a, b]$:

1. نجد النقاط عندما $f(x) = 0$.
2. نستخدم قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ كموقع على $[a, b]$ لتحصل على فترات جزئية من $[a, b]$.
3. نحري عملية التكامل على كل فترة جزئية.
4. نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة (3).

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$.

الحل

الخطوة الاولى : نجعل

$$f(x) = 0$$

$$\therefore x^3 - 4x = 0$$

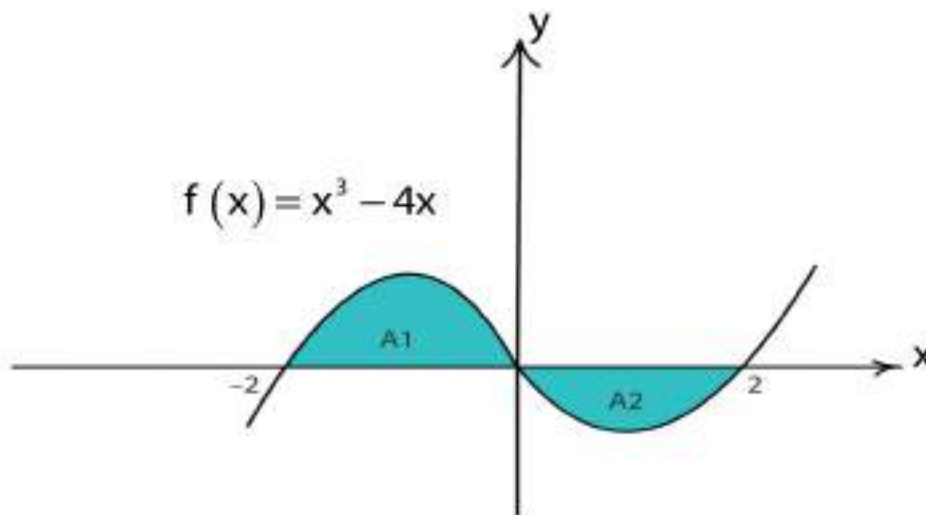
$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 0, \quad x = 2, \quad x = -2$$

الخطوة الثانية : فترات التكامل هي $[-2, 0]$ ، $[0, 2]$

الخطوة الثالثة :



$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - [4 - 8] = 4$$

$$A_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = [4 - 8] - 0 = -4$$

الخطوة الرابعة : جمع القيم المطلقة للتكاملات

$$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8 \quad \text{وحدة مربعة}$$

مثال - 2 -

جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 1$, $x = 3$.

الحل

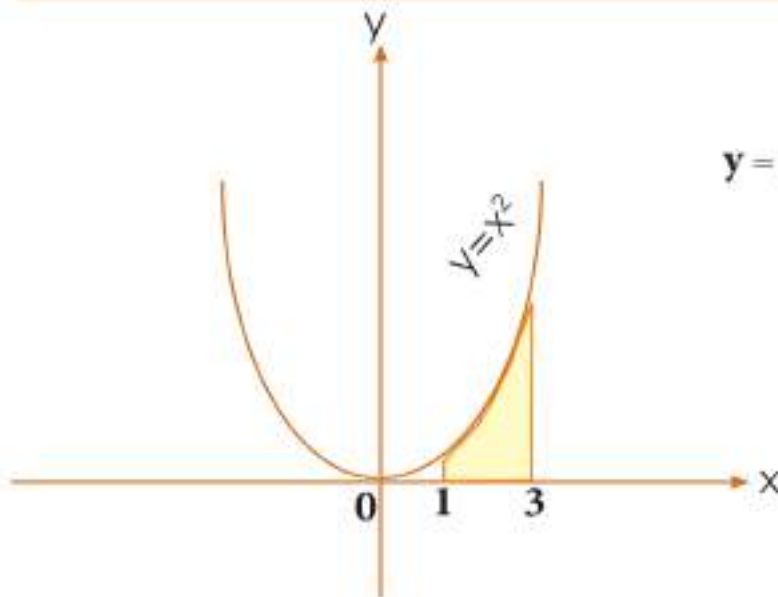
نقاط الدالة مع محور السينات بجعل $y = 0$

$$\therefore x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 3]$$

$\therefore$ لا تجزئة لفترة التكامل

$$\therefore f(x) \geq 0, x \in [1, 3]$$

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8 \frac{2}{3} \text{ وحدة مساحة}$$



الشكل (4-24)

مثال - 3 -

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \text{ ومحور السينات.}$$

الحل

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات أي عندما $y = 0$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1, x = 2$$

$\therefore$ فترات التكامل هنا: $[0, 1]$, $[1, 2]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2$$

$$A_2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ وحدة مساحة}$$

مثال - 4

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

الحل

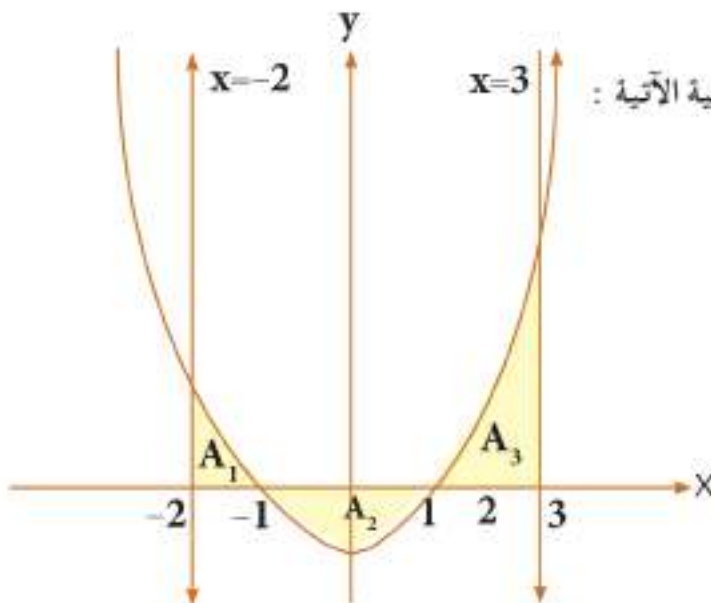
نجد تقاطع المنحني مع محور السينات

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm 1 \in [-2, 3]$$

$\therefore$ نجزي فترة التكامل الى الفترات الجزئية الآتية :

$$[-2, -1], [-1, 1], [1, 3]$$



الشكل (4-26)

نجد التكاملات :

$$A_1 = \int_{-2}^1 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^1$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} + 1 \right] - \left[-\frac{8}{3} + 2 \right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{3} - 1 \right] - \left[-\frac{1}{3} + 1 \right] = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3$$

$$A_3 = [9 - 3] - \left[\frac{1}{3} - 1 \right] = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

نجمع القيم المطلقة للتكاملات :

$$\therefore A = \left| \frac{4}{3} \right| + \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{20}{3} \right| = 9 \frac{1}{3} \quad \text{وحدة مساحة}$$

مثال - 5

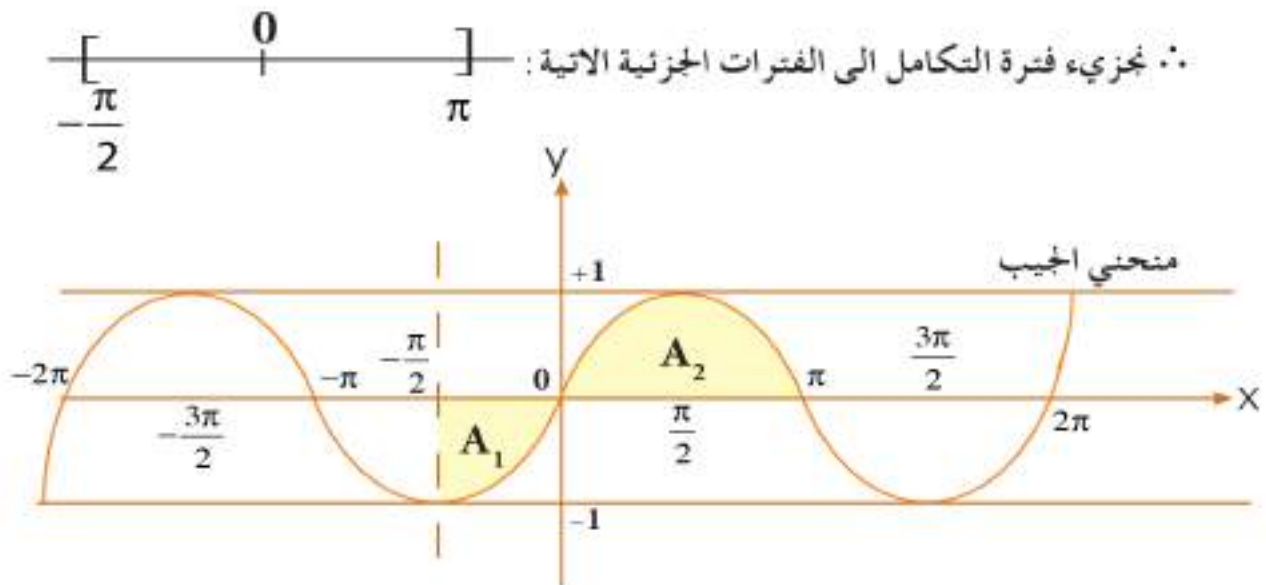
جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات وعلى الفترات $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

الحل

$$\therefore \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ n = 1 &\Rightarrow x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ n = 2 &\Rightarrow x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ n = -1 &\Rightarrow x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ n = -2 &\Rightarrow x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{aligned}$$



الشكل (4-27)

ثم نجد التكامل كما يأتي :

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\cos(0) + \cos(-\frac{\pi}{2})$$

$$A_1 = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0$$

$$A_2 = 1 + 1 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = |-1| + |2| \Rightarrow A = 3 \text{ وحدة مساحة}$$

مثال - 6

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

الحل

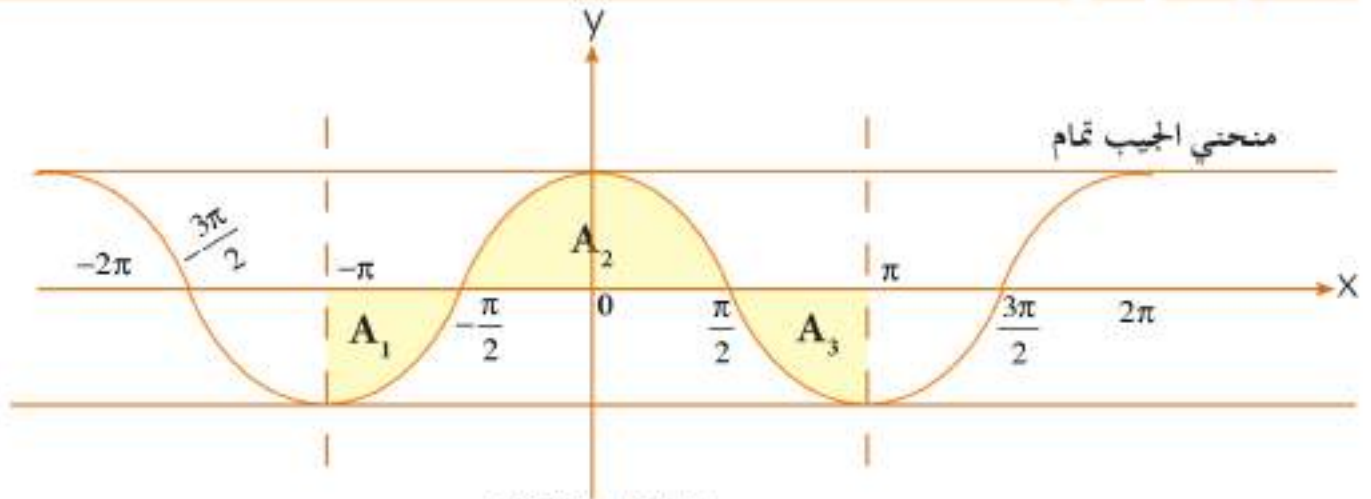
نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات :

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi] \\ n = -1 &\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi] \\ n = 1 &\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi] \\ n = -2 &\Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

نجزئ فترة التكامل الى الفترات الجزئية الآتية

$$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



الشكل (4-28)

نجد التكاملات :

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\pi/2}$$

$$A_1 = \sin(-\pi/2) - \sin(-\pi) = -\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| \quad \text{نجد مجموع القيم المطلقة للتكاملات :}$$

$$A = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4 \quad \text{وحدة مساحة}$$

[4-8-2] مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

سبق وأن درسنا كيفية إيجاد المساحة بين منحنى دالة ومحور السينات ومستقيمين والآن سندرس كيفية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين :

لتكن $f(x)$, $g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة A المحصورة بين المنحنيين نجدها كما يأتي :

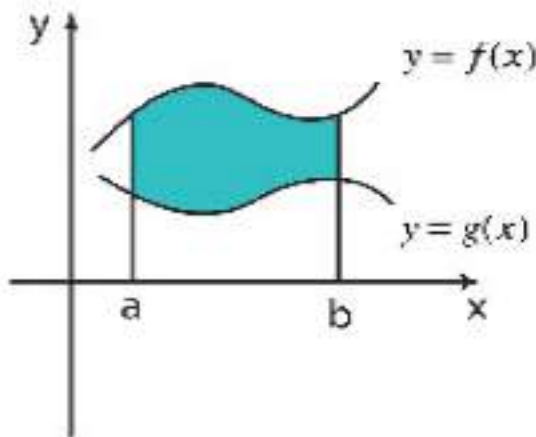
1) إذا كان $f(x) > g(x)$ في الفترة $[a, b]$ فالمساحة A هي

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

2) إذا كانت $f(x) < g(x)$ في الفترة $[a, b]$ فالمساحة A هي

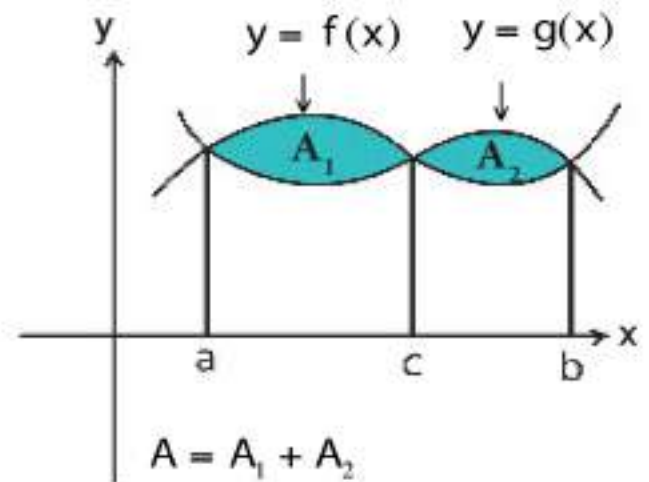
$$A = -\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

3) إذا تقاطع المنحنيان بين $[a, b]$ نجد نقاط التقاطع وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ثم نجد قيم x التي تنتمي إلى (a, b) ونجزئة $[a, b]$ إلى فترات جزئية ثم نجد تكامل الفرق بين الدالتين في كل فترة جزئية ثم بعد ذلك نجد مجموع مطلق التكاملات والتي تمثل المساحة المطلوبة .



$f(x) > g(x)$ في الفترة $[a, b]$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

مثال - 1

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

الحل

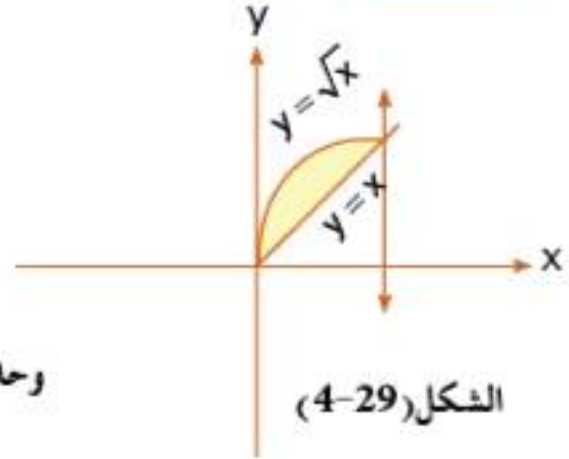
نجد تقاطع المنحنيين: $\sqrt{x} = x$

$$\therefore x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1 \Rightarrow x \in [0, 1]$$

$$A = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] - [0] \right| = \frac{1}{6} \quad \therefore A = \left| \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \text{ وحدة مساحة}$$



مثال - 2

جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم

$$y = x$$

الحل

تقاطع الدالتين

$$x^3 = x$$

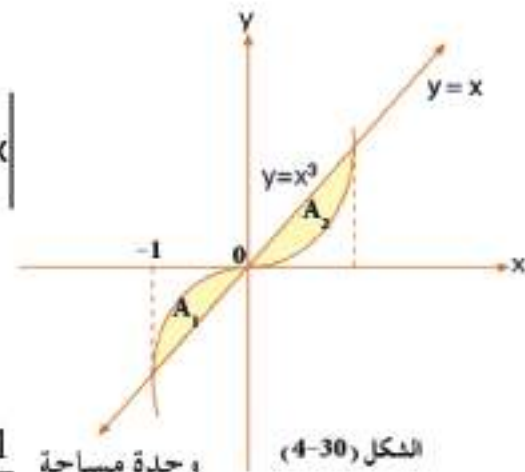
$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 0, x = 1, x = -1 \Rightarrow [-1, 0], [0, 1]$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right|$$

$$= \left| 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - (0) \right| = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

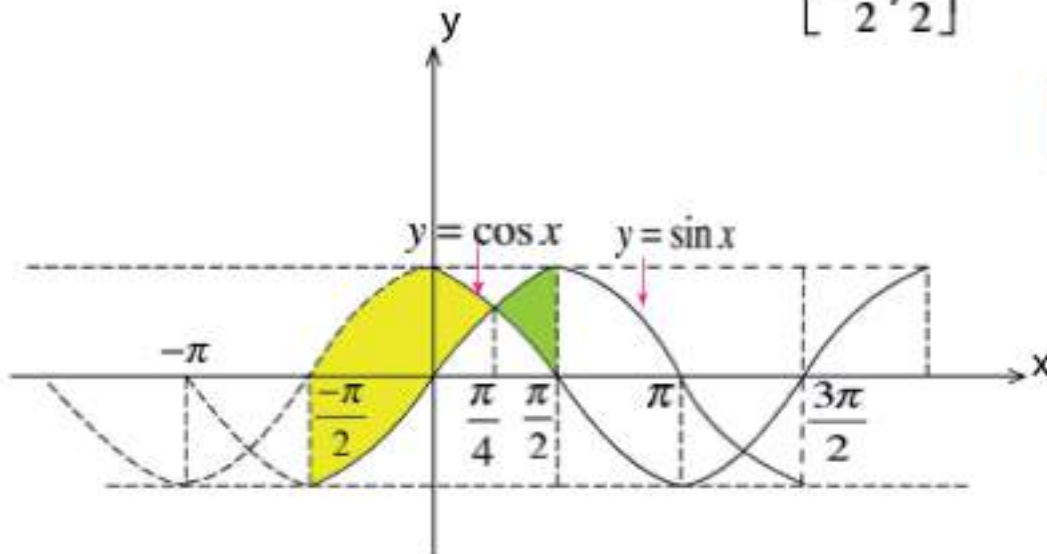


جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنين $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة

مثال - 3

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

الحل



نقاط الدالتين $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$

$$\therefore x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \therefore \text{نجزئ التكامل}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\sin x + \cos x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[\sin x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \right| + \left| \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$A = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \quad \text{وحدة مساحة}$$

The Distance المسافة [4-8-3]

لتكن $V(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستوٍ فإن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية

$$d = \left| \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt \right|$$

$[t_1, t_2]$ هي :

حيث d تمثل المسافة، المسافة كمية غير متجهة أما الإزاحة s والسرعة v والتعجيل a فإن كلاً منها كمية

متجهة لذا فإن :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt \quad \text{و} \quad v = \int a(t) dt$$

مثال - 1 -

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4 \text{ m/s}$

فجد :

(a) المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

(b) الإزاحة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

(c) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

(d) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

الحل

a)

من الواضح أن الجسم يغير اتجاهه

$$\therefore 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1, 3] \Rightarrow [1, 2], [2, 3]$$

$$\begin{aligned} \therefore d &= \left| \int_1^2 (2t - 4) dt \right| + \left| \int_2^3 (2t - 4) dt \right| = \left| \left[t^2 - 4t \right]_1^2 \right| + \left| \left[t^2 - 4t \right]_2^3 \right| \\ &= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |(9 - 12) - (4 - 8)| = 1 + 1 = 2\text{m} \end{aligned}$$

$$b) s = \int_1^3 (2t-4)dt = [t^2 - 4t]_1^3 = [9-12] - [1-4] = 0$$

$$c) d = \left| \int_4^5 (2t-4)dt \right| = \left| [t^2 - 4t]_4^5 \right| = \left| [25-20] - [16-16] \right| = 5m$$

$$d) s = \int_0^4 (2t-4)dt = [t^2 - 4t]_0^4 = [16-16] - [0] = 0$$

مثال - 2

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره 18 m/s^2 فإذا كانت سرعته قد أصبحت 82 m/s بعد مرور 4 ثواني من بد الحركة جد :
 a) المسافة خلال الثانية الثالثة
 b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

الحل

$$a) V = \int a(t)dt \Rightarrow V = \int 18dt$$

$$\therefore V = 18t + c$$

$$V = 82, t = 4$$

$$82 = (18 \times 4) + c \Rightarrow c = 10$$

$$\therefore V = 18t + 10$$

$$18t + 10 > 0 \Rightarrow V > 0$$

بما أن

$$\therefore d = \int_2^3 (18t + 10)dt = \left[9t^2 + 10t \right]_2^3 = [81 + 30] - [36 + 20] = 55m$$

$$b) S = \int_0^3 (18t + 10)dt = \left[9t^2 + 10t \right]_0^3 = [81 + 30] - [0] = 111m$$

تمارين

1. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1$, $x=-1$.

2. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2, 3]$ ومحور السينات.

3. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات.

4. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2, 5]$.

7. جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2$, $y = x^4 - 12$.

8. جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x) = \sin x \cos x$, $f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$.

9. جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x) = \sin x$, $f(x) = 2\sin x + 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

10. جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات.

- 11.** جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3) \text{ m/s}$ احسب :
- a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2, 4]$
- b) الازاحة في الفترة $[0, 5]$

- 12.** جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12) \text{ m/s}^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي 90 m/s احسب :
- a) السرعة عندما $t = 2$
- b) المسافة خلال الفترة $[1, 2]$
- c) الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

- 13.** تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2) \text{ m/s}$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ، ثم احسب التعجيل عندها

Volumes of Revolution: [4-9] الحجوم الدورانية:

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x=a$ الى $x=b$ حول محور السينات

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

نطبق العلاقة التالية

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y=a$ الى $y=b$ حول محور الصادات

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

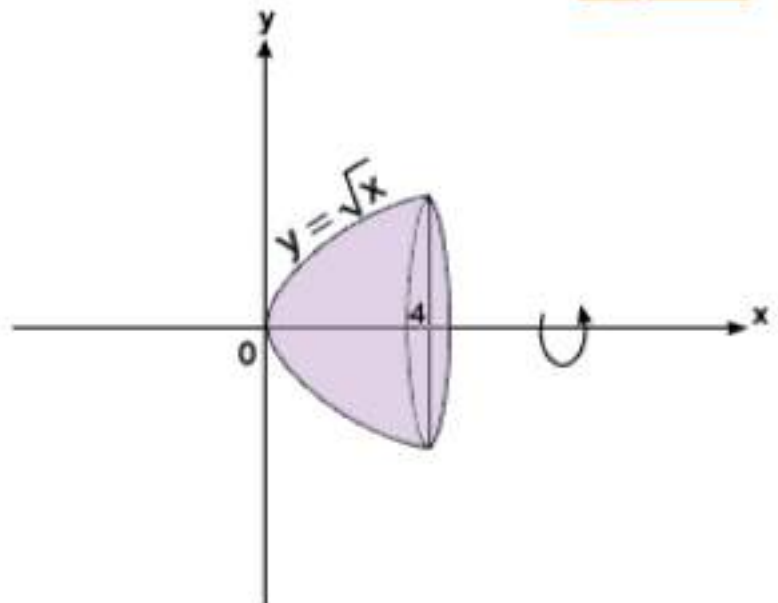
نطبق العلاقة التالية:

مثال - I -

المنطقة المحددة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ ، $0 \leq x \leq 4$ ومحور السينات ، دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

الحل

$$\begin{aligned} v &= \int_a^b \pi y^2 dx \\ &= \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x dx \\ &= \left[\pi \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi \end{aligned}$$



مثال - 2-

المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ، $1 \leq y \leq 4$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها .

الحل

$$v = \int_1^4 \pi x^2 dy = \int_1^4 \frac{\pi}{y} dy = [\pi \ln y]_1^4 = \pi \ln 4 - 0 = 2\pi \ln 2 \text{ وحدة مكعبة}$$

مثال - 3-

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x=0$, $x=2$ حول المحور السيني .

الحل

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi [x^2]_0^2 = 16\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

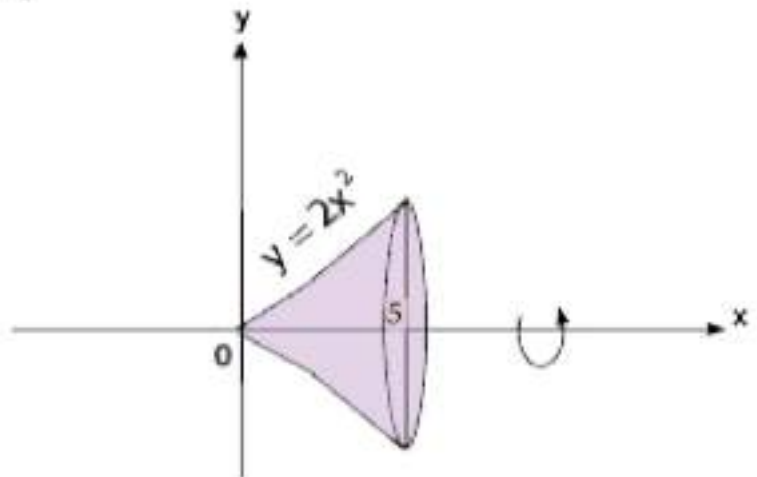
مثال - 4-

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x=0, x=5$ حول المحور السيني .

الحل

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^5 4x^4 dx = \frac{4\pi}{5} [x^5]_0^5$$

$$= \frac{4\pi}{5} \times 3125 = 2500\pi \text{ وحدة مكعبة}$$



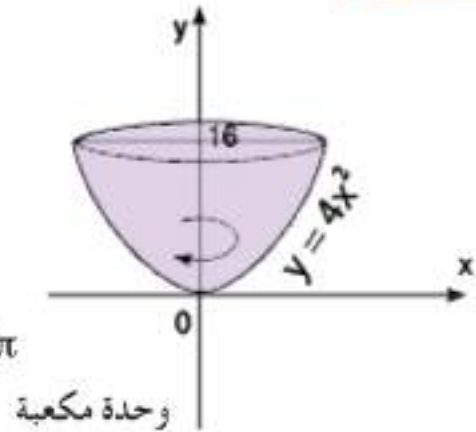
مثال - 5

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y=0$, $y=16$ حول المحور الصادي.

الحل

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \frac{\pi}{8} [y^2]_0^{16} = \frac{\pi}{8} [16 \times 16] = 32\pi$$



مثال - 6

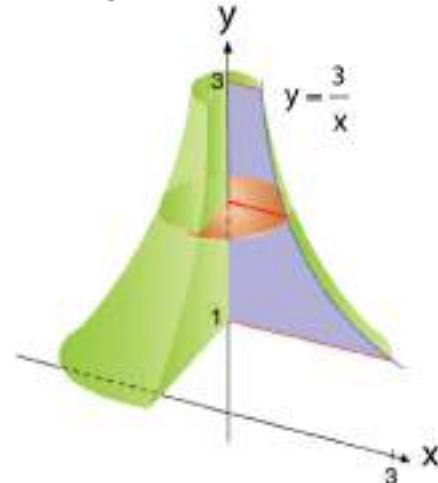
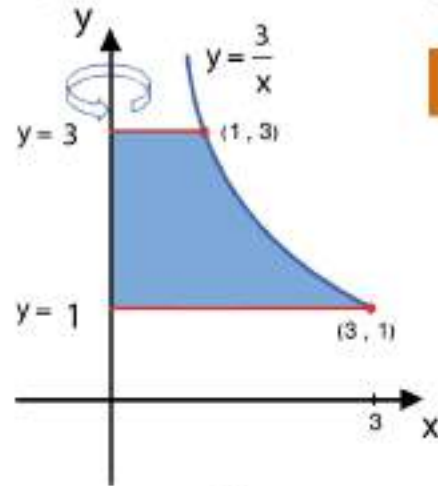
أوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ ، دورة كاملة حول المحور الصادي . $1 \leq y \leq 3$

الحل

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^3 \left[\frac{3}{y} \right]^2 dy = 9\pi \left[\frac{-1}{y} \right]_1^3$$

$$= 9\pi \left[\frac{-1}{3} + 1 \right] = 6\pi \text{ Unit}^3$$



تمارين

1. اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 2$ حول المحور السيني.
2. اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي.
3. احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي.
4. احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.