

الفصل السادس

Chapter Six

Space Geometry الهندسة الفضائية

تمهيد

[6-1]

الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

[6-2]

الاسقاط العمودي على مستو.

[6-3]

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$\overleftrightarrow{AB} - (x) - (y)$	الزاوية الزوجية بين (x) و (y)
$L - A$	المساحة الجانبية
$T - A$	المساحة الكلية
(x)	المستوي x

[6-1] تمهيد.

سبق وان علمنا أن كلاً من المستقيم والمستوي مجموعة غير منتهية من النقاط وأن كل نقطتين تعينان مستقيماً واحداً وواحد فقط وكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستوياً واحداً فقط، وكل اربعة نقاط لا تقع في مستو واحد تعين فضاء. اي أن المستقيم يحتوي على نقطتين على اقل تقدير، والمستوي يحتوي على ثلاث نقاط على اقل تقدير لا يحتويها مستقيم واحد، والفضاء يحتوي على اربع نقاط على اقل تقدير ليست جميعها في مستو واحد.

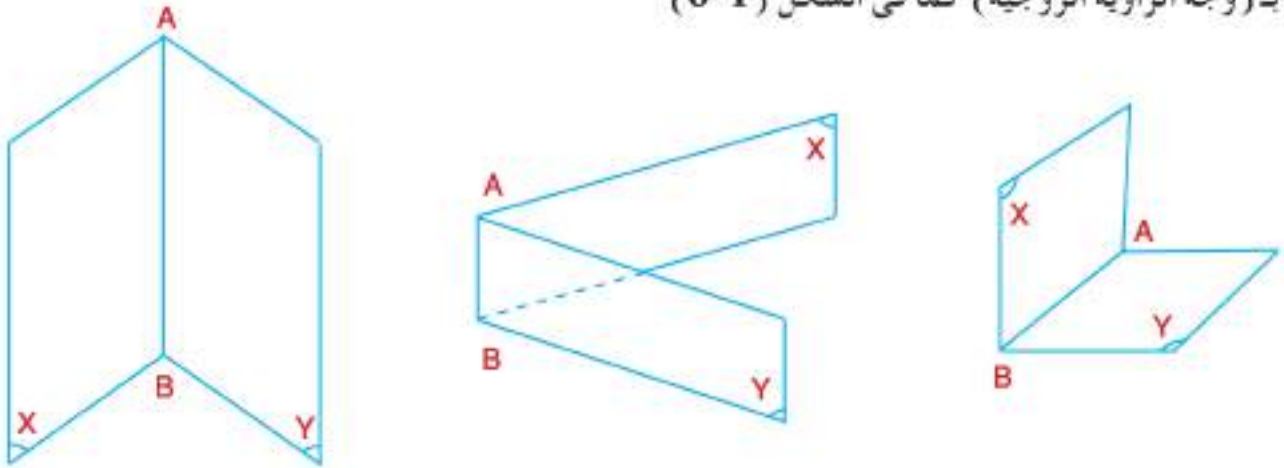
كما تعرفنا في الصف الخامس العلمي على علاقات بين المستقيمت والمستويات وبرهنا بعض المبرهنات التي يمكن الاستفادة منها في مبرهنات جديدة ستتعرف عليها في هذا الفصل. ولكي نتمكن من التواصل معنا وتتعرف على علاقات جديدة بين المستقيمت والمستويات، والمستويات والمستويات وتكتسب مفاهيم جديدة وتبرهن مبرهنات اخرى ما عليك الا الرجوع الى مراجعة ما درسته في هذا الموضوع في السنة السابقة.

[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

تعريف [6-2-1]

الزاوية الزوجية: اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة.

تسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية Edge of Dihedral) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل (6-1)



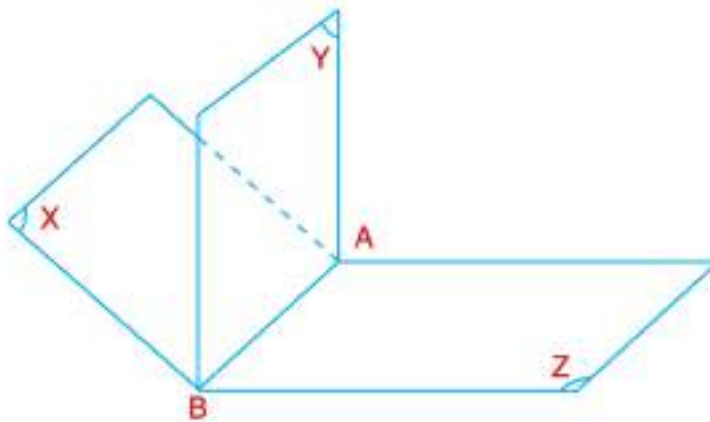
الشكل (6-1)

حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية، (X) و (Y) هما وجهاهما

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير: $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركاً مع زاوية اخرى.
مثلاً:

الزاوية الزوجية



الشكل (6-2)

$$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$$

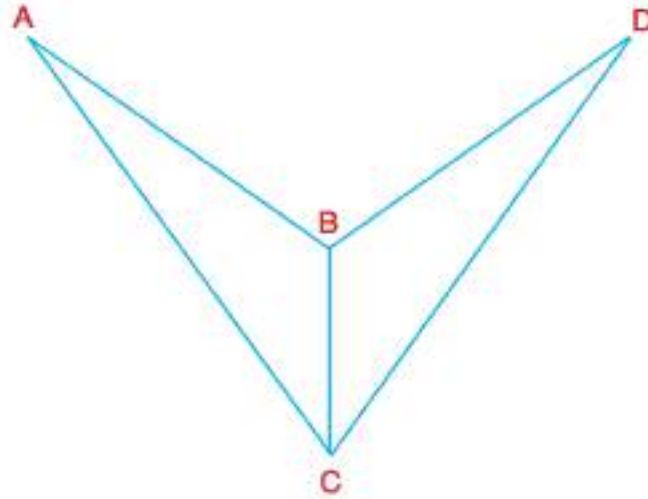
$$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

$$(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$$

ولا يمكن ان تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في اكثر من زاوية زوجية.

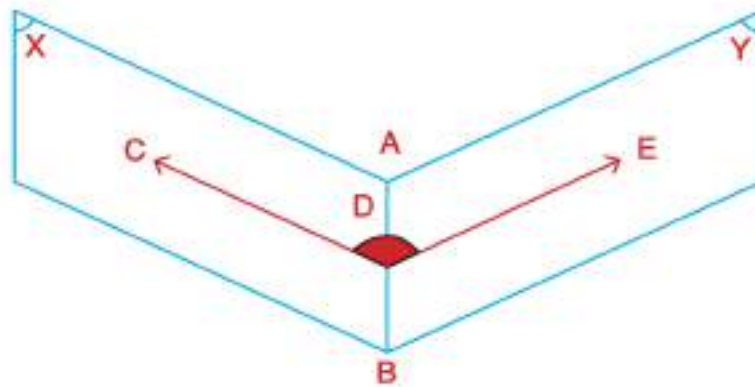
ملاحظة

عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوي واحد، نكتب
 الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ او الزاوية الزوجية
 بين المستويين (ABC) , (DBC) . كما في الشكل (6-3)



الشكل (6-3)

ورقاس الزاوية الزوجية كالآتي: نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overleftrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overleftrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية العائدة للزاوية الزوجية. (كما في الشكل (6-4))



الشكل (6-4)

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

$$\overrightarrow{DC} \subset (X), \overrightarrow{DE} \subset (Y)$$

$$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore \angle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ أو $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$.

تعريف [6-2-2]

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية: هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية
أو هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية

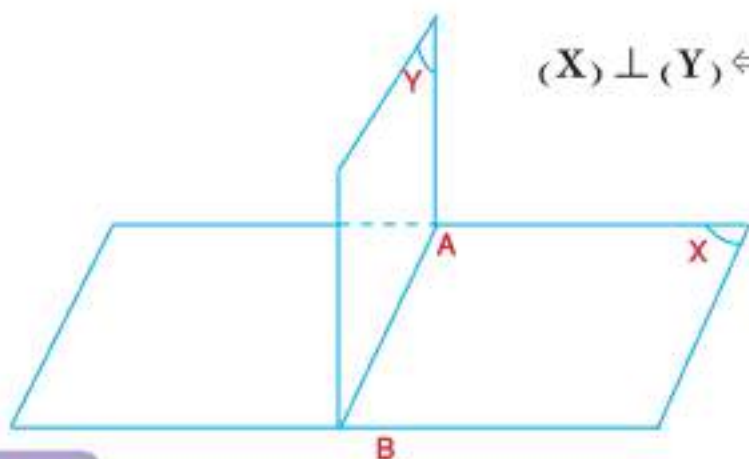
ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي

- (1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت
- (2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

تعريف [6-2-3]

إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فإن المستويين متعامدان وبالعكس

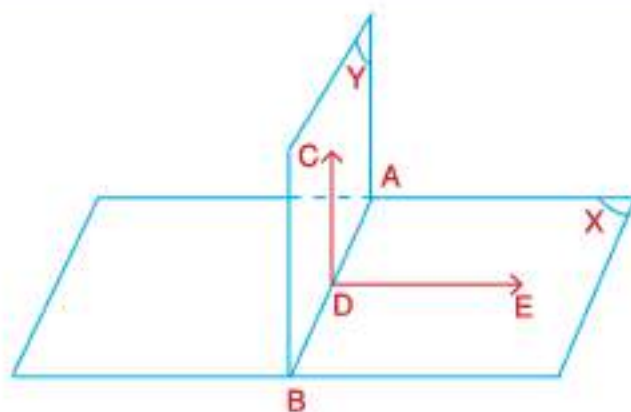
$$(X) \perp (Y) \Leftrightarrow (X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ$$



الشكل (6-5)

مبرهنة (7):

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر



أي أنه:

إذا كان $(X) \perp (Y)$

$$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات:

$$(X) \perp (Y), (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \text{ في نقطة D}$$

المطلوب اثباته:

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

(معطى)

$$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y), \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$$\therefore \angle CDE \text{ عائدة للزاوية الزوجية } (X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) \text{ (تعريف الزاوية العائدة)}$$

$$\therefore m \angle CDE = 90^\circ \text{ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)}$$

(إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$$

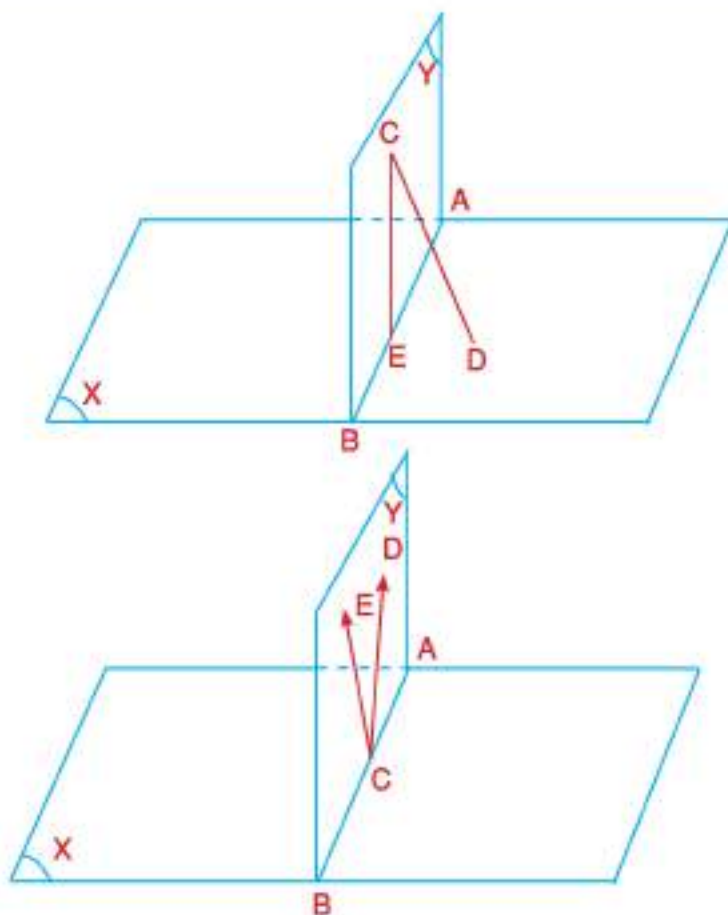
$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستوييهما)

نتيجة مبرهنة (7):

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوي فيه.

اي انه:



$$\vec{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X) \Rightarrow \vec{CD} \subset (Y)$$

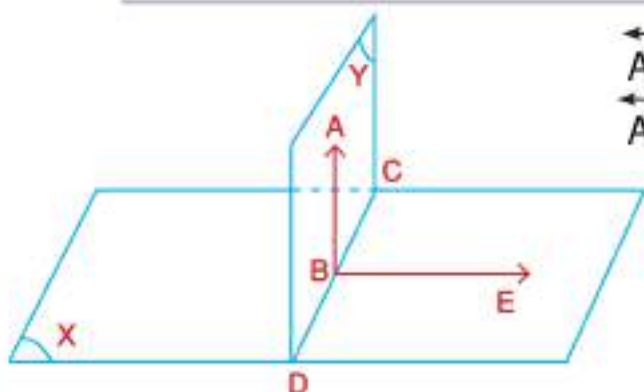
مبرهنة (8):

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر

اي انه:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} \perp (X) \\ \vec{AB} \subset (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$

المعطيات:



$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} \perp (X) \\ \vec{AB} \subset (Y) \end{array} \right\}$$

$$(Y) \perp (X)$$

البزھان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة) $B \in \overleftrightarrow{CD}$

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

(معطى) $\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \therefore$

المحتواة في المستوي والمارة من أثره

(معطى) $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y) \therefore$

∠ ABE ∴ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$$(\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE} \text{ ۇلا }) \quad m \angle ABE = 90^\circ$$

∴ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية

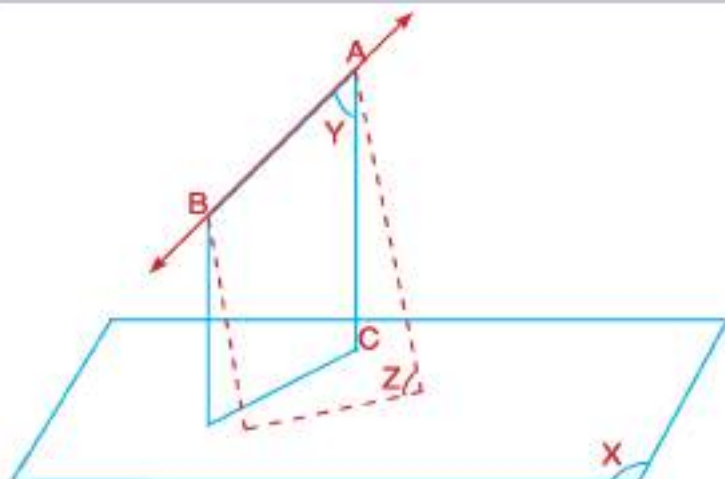
العائدة لها وبالعكس)

∴ $(Y) \perp (X)$ (إذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فإن المستويين متعامدان وبالعكس)

و. هـ. م

مېرھنہ (9) :

من مستقيم غير عمودي على مستو معلوم يوجد مستو وحيد عمودي على المستوي المعلوم.



ای آنه:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

فوجود مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$

وعمودي علي (X)

المعطيات:

AB غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته:

ايجاد مستوي وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\therefore \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوي وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحويهما)
 $\therefore (Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوجدانية:

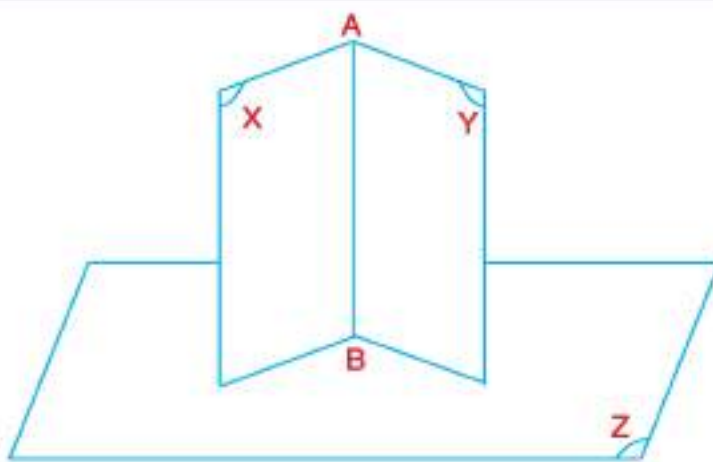
ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)
 $\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore (Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحويهما) **و.ه.م**

نتيجة مبرهنة (9):

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوي ثالث فان مستقيمي تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

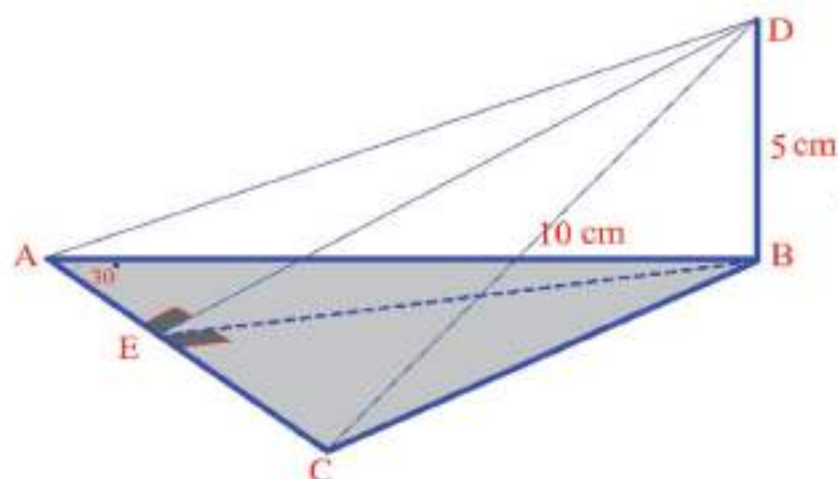
ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)
 لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

و.ه.م

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

نشاط: توجد طرق اخرى لبرهان هذه المبرهنة ، حاول ذلك.

مثال - 1



في $\triangle ABC$

$$\overline{BD} \perp (ABC), m \angle A = 30^\circ$$

$$AB = 10 \text{ cm}, BD = 5 \text{ cm}$$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$$\overline{BD} \perp (ABC), m \angle BAC = 30^\circ, AB = 10 \text{ cm}, BD = 5 \text{ cm}$$

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$$\overline{BD} \perp (ABC) \therefore \text{(معطى)}$$

$$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC} \text{ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)}$$

$$\angle DEB \Leftarrow \text{عائدة للزاوية الزوجية } \overline{AC} \text{ (تعريف الزاوية العائدة)}$$

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$$\triangle DBE \Leftarrow \text{قائم الزاوية في } B$$

$$\triangle BEA \text{ في القائم الزاوية في } E$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5 \text{ cm}$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B :

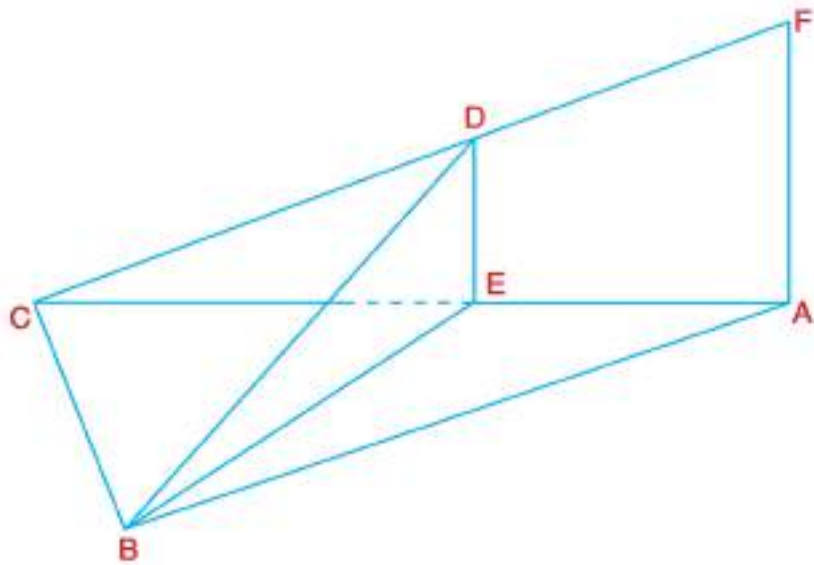
$$\therefore \text{قياس } m \angle BED = 45^\circ$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة

ها وبالعكس)

و. ه. م

مثال - 2-



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$$\begin{aligned} \overline{AF} &\perp (ABC) \\ \overline{BD} &\perp \overline{CF} \\ \overline{BE} &\perp \overline{CA} \end{aligned}$$

برهن أن:

$$\begin{aligned} \overline{BE} &\perp (CAF) \\ \overline{ED} &\perp \overline{CF} \end{aligned}$$

المعطيات:

$$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$$

المطلوب اثباته:

$$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$$

البرهان:

$$\therefore \overline{AF} \perp (ABC) \text{ (معطى)}$$

مبرهنة 8: يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على

الآخر (

$$\therefore \overline{BE} \perp \overline{CA} \text{ (معطى)}$$

مبرهنة 7: إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على

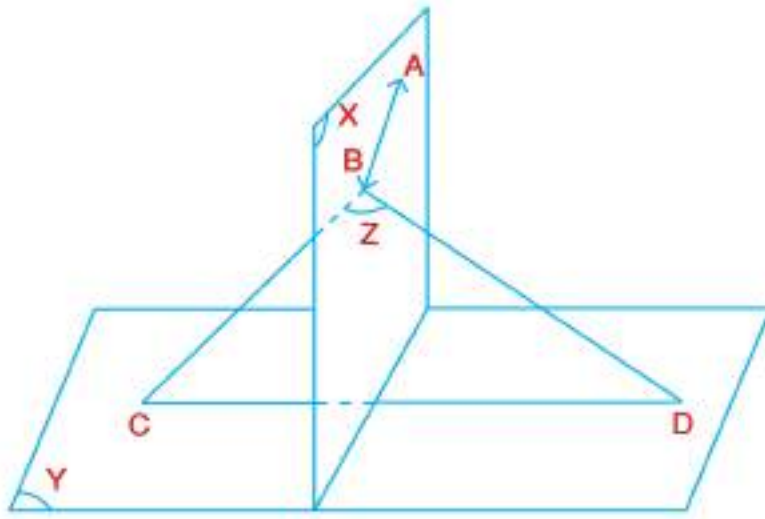
مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر (

$$\therefore \overline{BD} \perp \overline{CF} \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF} \text{ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)}$$

و.ه.م

مثال - 3-



(X), (Y) مستويان متعامدان

$$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$$

$$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \text{ عموديان على } \overleftrightarrow{AB}$$

ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب

برهنه ان:

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

المعطيات:

إن (X) $\perp$ (Y)، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستويًا وحيداً يحويهما)

$$\text{بما ان } \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \text{ (معطى) } \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \text{ (معطى)}$$

$$\therefore (X) \perp (Z) \text{ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)}$$

$$\therefore (X) \perp (Y) \text{ (معطى)}$$

$$\text{ولما كان } (Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD} \text{ (لانه محتوى في كل منهما)}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوي ثالث فان مستقيمي تقاطعهما يكون عمودياً على

المستوي الثالث)

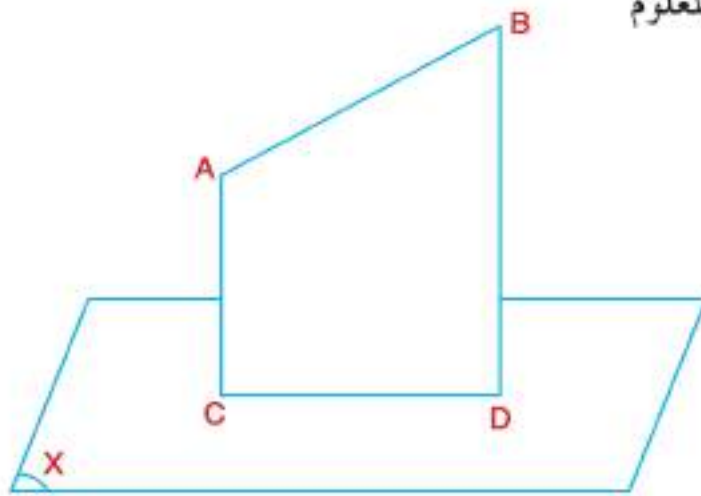
تمارين

1. برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .
2. برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستو آخر فان المستويين متعامدان .
3. برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .
4. A, B, C, D اربع نقاط ليست في مستو واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\angle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن ان $CD = BD$.
5. برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .
6. دائرة قطرها $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ عمودي على مستويها , D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .

(3-6) الإسقاط العمودي على مستوي

The Orthogonal Projection on a Plane

- (1) **مسقط نقطة على مستوي:** هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي .
- (2) **مسقط مجموعة نقط على مستوي:** لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .
- (3) **مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي معلوم:** هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X) وليكن

$$\overline{AC} \perp (X) \Leftarrow \text{مسقط } A \text{ على } (X) \text{ هو } C$$

$$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow \text{مسقط } B \text{ على } (X) \text{ هو } D$$

$$\therefore \text{مسقط } \overline{AB} \text{ على } (X) \text{ هو } \overline{CD}$$

ملاحظة اذا كان $\overline{AB} \parallel (X)$

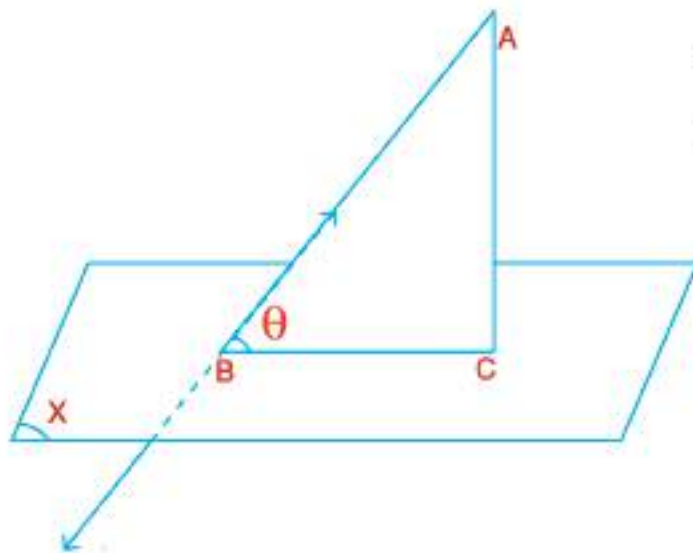
$$\text{فان } \overline{AB} = \overline{CD}$$

- (4) **الستقيم المائل (Inclined Line) على مستوي:** هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له

- (5) **زاوية الميل (Angle of Inclination):** هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي .

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C



∴ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

← $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

أي إن $0 < \theta < 90^\circ$

$\theta \in (0, 90^\circ)$

(6) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوي = طول المائل $\times$ جيب تمام زاوية الميل .

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فإن $\boxed{BC = AB \cos \theta}$

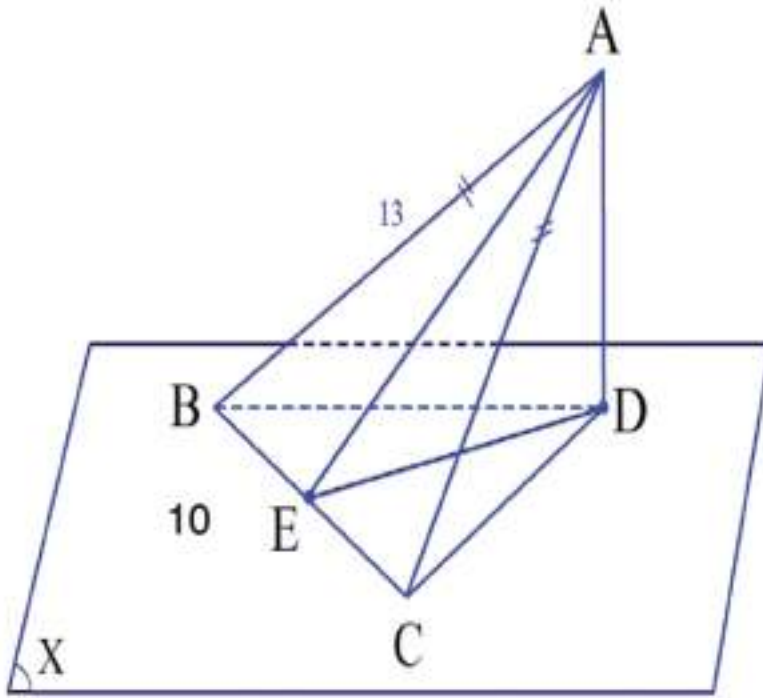
(7) مسقط مستوي مائل (Inclined Plane) على (X)

زاوية ميل مستوي على مستوي معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوي معلوم = مساحة المنطقة المائلة $\times$ جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $\boxed{A' = A \cdot \cos \theta}$

مثال 4 -



$\overline{BC} \subset (X)$ ، مثلث ABC

والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث

ABC والمستوي (X)

قياسها 60° فإذا كان

$AB = AC = 13\text{cm}, BC = 10\text{cm}$

جد مسقط المثلث (ABC) على (X)

ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

المعطيات :

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60^\circ$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان:

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D

(يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

(مسقط قطعة مستقيم على مستوي معلوم هو القطعة المحددة بأثري

العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$$\left\{ \begin{array}{l} \therefore \overline{CD} \text{ مسقط } \overline{AC} \\ \overline{BD} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{BC} \text{ مسقط نفسه على } (X) \end{array} \right.$$

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) ، نرسم $\overline{BC} \perp \overline{AE}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من

نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5\text{cm}$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

(نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$$\overline{ED} \perp \overline{BC} \quad \therefore$$

(تعريف الزاوية العائدة)

$$\angle DEA \quad \therefore \text{عائدة للزوجية } \overline{BC}$$

(معطى)

$$60^\circ = \angle BC$$

لكن قياس الزاوية الزوجية $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\text{cm}$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60^\circ = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6\text{cm}$$

$$\text{مساحة المثلث BCD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\text{cm}^2$$

و . ه . م

ملاحظة

لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالاتي:

$$\text{مساحة BCD} = \text{مساحة } ABC \times \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times (12 \times 10 \times \frac{1}{2}) = 30\text{cm}^2$$

و . ه . م

تمارين

1. برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .
2. برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فإن ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .
3. برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه
4. برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فإن أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .
5. برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الاطول .
6. برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستو أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .